فرمولهای مهم آمار ریاضی

گردآوری : سید جمال میرکمالی
گروه دانش آماری - پاییز ۱۳۸۵

جدول توزیع های آماری

۱- یکنواخت گسسته

$X \sim DU\{۱,۲,\ldots,N\}$		$x=۱,۲,\ldots,N$	
$f_X(x)=\frac{۱}{N}$	$E(X)=\frac{N+۱}{۲}$	$V(X)=\frac{N^۲-۱}{۱۲}$	$M_X(t)=\frac{\sum_{i=۱}^{N} e^{it}}{N}$

۲- دوجمله ای

$X \sim Bin(n,p)$		$x=۰,۱,\ldots,n$	$q:=۱-p$
$f_X(x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$	$E(X)=np$	$V(X)=npq$	$M_X(t)=(q+pe^t)^n$

۳- فوق هندسی

$X \sim HG(N,m,n)$		$x=۰,۱,\ldots,m$	$p:=m/N\,,\ q:=۱-p$
$f_X(x)=\frac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$E(X)=np$	$V(X)=\frac{N-n}{N-۱}npq$	

۴- هندسی

$X \sim Ge(p)$		$x=۰,۱,۲,\ldots$	$q:=۱-p$
$f_X(x)=pq^x$	$E(X)=\frac{q}{p}$	$V(X)=\frac{q}{p^۲}$	$M_X(t)=\frac{p}{۱-qe^t}$

۵- دو جمله ای منفی

$X \sim NB(r,p)$		$x=۰,۱,۲,\ldots$	$q:=۱-p$
$f_X(x)=\binom{r+x-۱}{x}p^r q^x$	$E(X)=\frac{rq}{p}$	$V(X)=\frac{rq}{p^۲}$	$M_X(t)=\left(\frac{p}{۱-qe^t}\right)^r$

۶- پواسون

$X \sim P(\lambda)$		$x=۰,۱,۲,\ldots$	
$f_X(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$	$E(X)=\lambda$	$V(X)=\lambda$	$M_X(t)=e^{-\lambda(۱-e^t)}$

۷- یکنواخت

$X \sim U(a,b)$		$x=[a,b]$	
$f_X(x)=\frac{۱}{b-a}$	$E(X)=\frac{a+b}{۲}$	$V(X)=\frac{(b-a)^۲}{۱۲}$	$M_X(t)=\frac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}$

۸- نمایی

$X \sim E(\lambda)$		$x=(۰,\infty)$	
$f_X(x)=\frac{۱}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}$	$E(X)=\lambda$	$V(X)=\lambda^۲$	$M_X(t)=\frac{۱}{۱-\lambda t}$

۹- نمایی دو پارامتری

$X \sim E(\theta,\lambda)$	$x=(\theta,\infty)$	
$f_X(x)=\frac{۱}{\lambda}e^{-\frac{x-\theta}{\lambda}}$	$E(X)=\lambda+\theta$	$V(X)=\lambda^{۲}$

۱۰- گاما

$X \sim G(n,\lambda)$		$x=(۰,\infty)$	
$f_X(x)=\frac{۱}{\lambda^n\Gamma(n)}x^{n-۱}e^{-\frac{x}{\lambda}}$	$E(X)=n\lambda$	$V(X)=n\lambda^{۲}$	$M_X(t)=\left(\frac{۱}{۱-\lambda t}\right)^n$
	$E(X^k)=\lambda^k\frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n)}$		

۱۱- کای دو

$X \sim \chi^{۲}_{(n)}=G(n/۲,۲)$		$x=(۰,\infty)$	
$f_X(x)=\frac{۱}{\lambda^{\frac{n}{۲}}\Gamma(\frac{n}{۲})}x^{\frac{n}{۲}-۱}e^{-\frac{x}{۲}}$	$E(X)=n$	$V(X)=۲n$	$M_X(t)=\left(\frac{۱}{\sqrt{۱-۲t}}\right)^n$

۱۲- نرمال

$X \sim N(\mu,\sigma^{۲})$		$x=(-\infty,\infty)$	
$f_X(x)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi\sigma^{۲}}}e^{-\frac{(x-\mu)^{۲}}{۲\sigma^{۲}}}$	$E(X)=\mu$	$V(X)=\sigma^{۲}$	$M_X(t)=e^{\mu t+\frac{\sigma^{۲}t^{۲}}{۲}}$

۱۳- بتا

$X \sim Beta(\alpha,\beta)$		$x=[۰,۱]$	
$f_X(x)=\frac{۱}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-۱}(۱-x)^{\beta-۱}$	$E(X)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$V(X)=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^{۲}(\alpha+\beta+۱)}$	$E(X^k)=\frac{B(\alpha+k,\beta)}{B(\alpha,\beta)}$

برخی خواص توزیع

۱- توزیع آماره های ترتیبی:

$$f_{X(j)}(x)=\frac{n!}{(j-۱)!(n-j)!}[F(x)]^{j-۱}[۱-F(x)]^{n-j}f(x)$$

$$f_{X(i),X(j)}(x,y)=\frac{n!}{(i-۱)!(j-i-۱)!(n-j)!}[F(x)]^{i-۱}[F(y)-F(x)]^{j-i-۱}[۱-F(y)]^{n-j}f(x)f(y)$$

$$f_{X(۱),\dots,X(n)}(x_۱,\dots,x_n)=n!\prod_{i=۱}^{n}f(x_i)$$

$$f_{X(۱)}(x)=n[۱-F(x)]^{n-۱}f(x)\ ;\quad f_{X(n)}(x)=n[F(x)]^{n-۱}f(x)$$

$$f_{X(۱),X(n)}(x,y)=n(n-۱)[F(y)-F(x)]^{n-۲}f(x)f(y)$$

۲- نامساوی جنسن: برای تابع محدب h داریم: $E(h(X))\ge h(E(X))$

۳- نامساوی مارکوف: برای تابع نا منفی g داریم: $P(g(X)\ge a)\le\frac{E(g(X))}{a}$

جدول روابط بین توزیع ها

برنولی	$X_1,\dots,X_n \overset{iid}{\sim} Be(p) \Rightarrow Y=\sum X_i \sim Bin(n,p)$
دوجمله ای	$X\sim Bin(n,p)\,;\,Y\sim Bin(m,p)\Rightarrow X+Y\sim Bin(m+n,p)$
هندسی	$X_1,\dots,X_n \overset{iid}{\sim} Ge(p)\Rightarrow X_{(1)}\sim Ge(1-q^n);\sum X_i\sim NB(n,p)$
پواسون	$X_1,\dots,X_n \overset{iid}{\sim} P(\lambda)\Rightarrow Y=\sum X_i\sim P(n\lambda)\,;\,X_i\|Y=y\sim Bin(y,\frac{1}{n})$
یکنواخت	$X\sim U(0,1)\Rightarrow -\theta\ln X\sim E(\theta)\,;\,-2\ln X\sim\chi^2_{(2)}$
یکنواخت	$X_1,\dots,X_n \overset{iid}{\sim} U(0,1)\Rightarrow X_{(r)}\sim Beta(r,n+1-r)\,;\,X_{(r)}-X_{(s)}\sim X_{(r-s)}$
نمایی	$X_1,\dots,X_n \overset{iid}{\sim} E(\lambda)\Rightarrow X_{(1)}\sim E(\frac{\lambda}{n});\frac{X_1}{X_1+X_2}\sim U(0,1);\frac{X_1-X_2}{X_1+X_2}\sim U(-1,1);\sum X_i\sim G(n,\lambda)$
نمایی دو پارامتری	$X_1,\dots,X_n \overset{iid}{\sim} E(\mu,\lambda)\Rightarrow X_{(1)}\sim E(\mu,\frac{\lambda}{n})\,;\,\sum(X_i-X_{(1)})\sim\frac{\lambda}{2}\chi^2_{(2n-2)}$
گاما	$X\sim G(n,\lambda);Y\sim G(m,\lambda)\Rightarrow X+Y\sim G(m+n,\lambda)\,;\,\frac{X}{X+Y}\sim Beta(n,m)$
کای دو	$X_i\sim\chi^2_{(r_i)}\Rightarrow\sum X_i\sim\chi^2_{(\sum r_i)}\,;\,\frac{X_1/r_1}{X_2/r_2}\sim F_{(r_1,r_2)}$
نرمال	$X_1,\dots,X_n \overset{iid}{\sim} N(0,1)\Rightarrow\sum X_i\sim N(0,n)\,;\,\frac{X_1}{X_2}\sim C(0,1)\,;\,\frac{X_1}{\|X_2\|}\sim C(0,1)$
کوشی	$X_1,\dots,X_n \overset{iid}{\sim} C(\theta,\sigma)\Rightarrow\sum X_i\sim C(n\theta,n\sigma)\,;\,\frac{1}{X_1}\sim C(\theta,\sigma)$
پارتو	$X_1,\dots,X_n \overset{iid}{\sim} Pa(\alpha,\beta)\Rightarrow\ln\frac{X_1}{\beta}\sim E(\frac{1}{\alpha})\,;\,X_{(1)}\sim Pa(n\alpha,\beta)\,;\,2\alpha\sum\ln\frac{X_1}{X_{(1)}}\sim\chi^2_{2n-2}$
تی	$X\sim t_{(n)}\Rightarrow X^2\sim F_{(1,n)}\,;\,\frac{1}{1+X^2/n}\sim Beta(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$
بتا	$X\sim Beta(\alpha,1)\Rightarrow -2\alpha\ln X\sim\chi^2_{(2)}$
بتا	$X\sim Beta(\frac{m}{2},\frac{n}{2})\Rightarrow X=\frac{n}{m}\frac{X}{1-X}\sim F_{(m,n)}$
وایبل	$X\sim W(\alpha,\lambda)\Rightarrow 2\lambda X_1^{\alpha}\sim\chi^2_{(2)}\,;\,X_{(1)}\sim W(\alpha,\frac{\lambda}{n})$

ریاضیات ضروری

۱- بسط و ضرایب دو جمله ای

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!};\binom{y}{k}=\frac{y(y-1)\dots(y-k+1)}{k!};\binom{-n}{k}=(-1)^k\binom{n+k-1}{k}$$

$$(a+b)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^jb^{n-j}\,;(1+x)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j\,;(1-x)^{-n}=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n+j-1}{j}x^j$$

$$(1-x)^{-1}=\frac{1}{1-x}=\sum_{j=0}^{\infty}x^j\,;(1-x)^{-2}=\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)x^j$$

$$\sum_{i=0}^{n}r^i=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}\quad;\quad\sum_{i=n}^{\infty}r^i=\frac{r^n}{1-r}$$

۲- روابط مثلثلتی

$$\sin x\pm y=\sin x\cos y\pm\sin y\cos x$$
$$\cos x\pm y=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$$
$$\tan x\pm y=\frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\tan y}$$
$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\quad;\quad\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\quad;\quad\cosh^2 x-\sinh^2 x=1;$$

۳- توابع گاما و بتا

$$\Gamma(t)=\int_0^{\infty}x^{t-1}e^{-x}dx\quad,\quad t>0\quad;\quad\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)\quad;\quad\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$
$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

۴- دستور لایب نیتز

$$S(t)=\int_{g(t)}^{h(t)}f(x;t)dt\Rightarrow\frac{dS}{dt}=f(h(t),t).h'(t)-f(g(t),t).g'(t)+\int_{g(t)}^{h(t)}f'(x;t)dt$$

۵- بسط تیلور

$$f(x)=f(a)+f^{(1)}(a)(x-a)+f^{(2)}(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+\dots$$
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$$
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$$
$$\sinh x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\dots$$
$$\cosh x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\dots$$
$$e^x=\sum_{t=0}^{\infty}\frac{x^t}{t!}$$

مشتق و انتگرال نا معین

f	f'
x^n	$nx^{n-۱}$
$\ln\|x\|$	$\frac{۱}{x}$
a^x	$a^x \ln a$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$۱+\tan^۲ x$
$\cot x$	$-(۱+\cot^۲ x)$
$\arcsin x$	$\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$
$\arccos x$	$\frac{-۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$
$\arctan x$	$\frac{۱}{۱+x^۲}$
$\mathrm{arc}\cot x$	$\frac{-۱}{۱+x^۲}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\mathrm{arcsinh}\, x$	$\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$
$\mathrm{arccosh}\, x$	$\frac{-۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$
$\mathrm{arctanh}\, x$	$\frac{۱}{۱-x^۲}$
$\mathrm{arccoth}\, x$	$\frac{۱}{۱-x^۲}$

f	$\int f dx$
x^n	$\frac{x^{n+۱}}{n+۱}$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\frac{۱}{a+bx}$	$\frac{۱}{b}\ln\|a+bx\|$
$\frac{a+x}{b+x}$	$x+(a-b)\ln(b+x)$
$\frac{۱}{a^۲+x^۲}$	$\frac{۱}{a}\arctan\frac{x}{a}$
$\frac{۱}{a^۲-x^۲}$	$\frac{۱}{۲a}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\|$
$\sqrt{a^۲+x^۲}$	$\frac{x}{۲}\sqrt{a^۲+x^۲}+$ $\frac{a^۲}{۲}\ln[x+\sqrt{a^۲+x^۲}]$
$\frac{۱}{\sqrt{a^۲+x^۲}}$	$\ln[x+\sqrt{a^۲+x^۲}]$
$\frac{۱}{\sqrt{x^۲-a^۲}}$	$\ln[x+\sqrt{x^۲-a^۲}]$