Http://MiladZaman005.blogfa.com

گروه دانش آماری

آنالیز ریاضی۲

شرح کامل قضایای فصل هفت کتاب آنالیز ریاضی رودین

Mathematical Analysis

دنباله ها و سری های توابع

Sequences and Series of Functions

نویسنده : سید جمال میرکمالی

دیماه ۱۳۸۵

* نقل مطلب از دانش آماری فقط با ذکر منبع و نام نویسنده مجاز می باشد *

به لحاظ خلاصه بودن اثبات های کتاب رودین ، در این کتابچه شرح مفصلی از اثبات های اصول آنالیز تهیه شده است. مسلما اثبات ها خالی از اشکال نیستند . لطفا در صورت ملاحظه اشکال یا اشتباه ، نظرات خود را از ما دریغ نفرمایید. هر گونه پیشنهاد خود را در جهت بهبود آموزش ، به ایمیل Mirkamali1@yahoo.com یا به دانش آماری ارائه فرمایید.

با تشکر

دنباله توابع : یک دنباله از توابع حقیقی (یا مختلط) تابعی چون $f:\mathbb{N}\times E\Rightarrow\mathbb{R}(\mathbb{C})$ است. این دنباله را معمولا به صورت $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ نشان می دهیم.

مثال : تابع $x\in[0,1];n=1,2,\ldots$ $\quad f_n(x)=x^n$ یک دنباله از توابع حقیقی روی بازه $[0,1]$ است.

$$x,x^2,x^3,\ldots$$

همگرایی نقطه به نقطه: اگر برای هر $x\in E$ حد $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ وجود داشته باشد، $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ را حد دنباله $\{f_n(x)\}$ می نامیم و $\{f_n(x)\}$ را به $f(x)$ همگرای نقطه به نقطه گوییم و با نماد زیر نمایش می دهیم $f_n(x)\underset{E}{\overset{p.w}{\to}}f(x)$.

بعبارتی

$$x\in E,\forall\varepsilon>0\quad\exists N_{\varepsilon,x}\quad\forall n\ge N_{\varepsilon,x}\Rightarrow\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$$

همگرایی یکنواخت : گویند دنباله ای از توابع $\{f_n(x)\}$ بر E به تابعی چون $f(x)$ همگرای یکنواخت است هرگاه

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists N_{\varepsilon}\quad\forall n\ge N_{\varepsilon}\Rightarrow\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon\quad(\forall x\in E)$$

همگرایی یکنواخت را با نماد $f_n(x)\underset{E}{\overset{U}{\to}}f(x)$ نمایش می دهیم.

شرط کشی

قضیه ۱ : دنباله توابع $\{f_n(x)\}$ بر E به طور یکنواخت همگراست اگر و فقط اگر

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\quad\forall n,m\ge N\ ,\ x\in E\Rightarrow\ |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$$

برهان:

$$(\Rightarrow)f_n\underset{E}{\overset{U}{\to}}f\ \Rightarrow\forall\varepsilon>0\quad\exists N_{\varepsilon}\quad\begin{cases}\forall n\ge N_{\varepsilon}\Rightarrow|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/2\\ \forall m\ge N_{\varepsilon}\Rightarrow|f_m(x)-f(x)|<\varepsilon/2\end{cases}\Rightarrow$$

$$|f_n(x)-f_m(x)|=|f_n(x)-f_m(x)\pm f(x)|\le|f_n(x)-f(x)|+|f_m(x)-f(x)|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

$$(\Leftarrow)\forall\varepsilon>0\ \exists N\quad\forall n,m\ge N\quad\Rightarrow\quad|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon\Rightarrow|f_n(x)-f_{n+k}(x)|<\varepsilon\quad(\forall k\in\mathbb{N})$$

$$\Rightarrow\lim_{k\to\infty}|f_n(x)-f_{n+k}(x)|<\varepsilon$$

چون $f_i(x)$ در $\mathbb{R}$ (یا $\mathbb{C}$) کشی است و $\mathbb{R}$ تام است، لذا به تابعی چون $f(x)$ همگرا است.

$$\Rightarrow|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\Rightarrow f_n(x)\underset{E}{\overset{U}{\to}}f(x)\ \blacksquare$$

قضیه ۲ : فرض کنیم $f_n(x)\underset{E}{\overset{p.w}{\to}}f(x)$ و $M_n=\sup\limits_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|$ در این صورت $f_n(x)\overset{U}{\to}f(x)$ اگر و فقط اگر $\lim\limits_{n\to\infty}M_n=0$.

برهان:

$$(\Rightarrow)f_n(x)\overset{U}{\to}f(x)\Rightarrow\forall\varepsilon>0\quad\exists N\quad\forall n\ge N\Rightarrow|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\ \ (\forall x\in E)$$

چون ε یک کران بالا برای $|f_n(x)-f(x)|$ است پس:

$$\sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\Rightarrow M_n<\varepsilon\Rightarrow\lim_{n\to\infty}M_n=0$$

$$(\Leftarrow)\lim_{n\to\infty}M_n=0\Rightarrow\forall\varepsilon>0\quad\exists N\quad\forall n\ge N\ \Rightarrow\sup|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\quad(\forall x\in E)\Rightarrow f_n(x)\overset{U}{\to}f(x)\ \blacksquare$$

آزمون M- وایرشتراس

قضیه ۳ : فرض کنیم $\{f_n(x)\}$ دنباله ای از توابع تعریف شده بر E باشد . گیریم $n=1,2,\ldots$ $|f_n(x)|<M_n$ در این صورت اگر $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ همگرا باشد ، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ همگرای یکنواخت است.

برهان :

$$S_n(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$

$$n>m \Rightarrow |S_n(x)-S_m(x)|=|f_{m+1}(x)+\ldots+f_n(x)|\le M_{m+1}+\ldots+M_n=\sum_{i=m+1}^{n} M_i$$

چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ همگراست ، پس کشی نیز هست لذا

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists n_0 \quad \forall n>m\ge n_0 \Rightarrow \left|\sum_{i=m+1}^{n} M_i\right|<\varepsilon \quad \Rightarrow |S_n(x)-S_m(x)|<\varepsilon \quad (\forall x\in E)$$

بنابراین دنباله مجموع جزیی $\{S_n(x)\}$ همگرای یکنواخت است. ■

قضیه ٤ : فرض کنیم در یک فضای متری $f_n(x)\xrightarrow[E]{U} f(x)$ و x یک نقطه حدی E باشد. فرض کنیم $\lim_{t\to x} f_n(t)=A_n$ در این صورت دنباله عددی $\{A_n\}$ همگراست و $\lim_{t\to x} f(t)=\lim_{n\to\infty} A_n$ یا بعبارتی داریم $\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x} f_n(t)=\lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty} f_n(t)$.

برهان: اگر $\varepsilon>0$ داده شده باشد ،

$$f_n(x)\xrightarrow{U} f(x)\Rightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists n_0 \quad \forall n,m\ge n_0 \Rightarrow |f_n(t)-f_m(t)|<\varepsilon \xrightarrow{t\to x} |A_n-A_m|<\varepsilon$$

پس دنباله $\{A_n\}$ کشی است لذا به نقطه ای چون A همگراست.

$$|f(t)-A|\le|f(t)-f_n(t)|+|f_n(t)-A_n|+|A_n-A| \qquad (1)$$

بنابر همگرایی یکنواخت : $\exists n_1 \quad \forall n\ge n_1 \Rightarrow \quad |f(t)-f_n(t)|<\varepsilon$

بنابر تعریف حد $f_n(t)$: $\exists\delta>0 \quad |t-x|<\delta \;\Rightarrow\; |f_n(t)-A_n|<\varepsilon$

بنا بر همگرایی $\{A_n\}$: $\exists n_2 \quad \forall n\ge n_2 \Rightarrow \quad |A_n-A|<\varepsilon$

با توجه به (۱) داریم اگر $N=\max\{n_1,n_2\}$ داریم $|f(t)-A|<3\varepsilon$ بنابراین $\lim_{t\to x} f(t)=\lim_{n\to\infty} A_n$. ■

نتیجه : هرگاه $\{f_n(x)\}$ دنباله ای از توابع پیوسته در x_0 باشد و $f_n(x)\xrightarrow{U} f(x)$ ، آنگاه $f(x)$ نیز در x_0 پیوسته است.

برهان : طبق قضیه قبل داریم $\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x} f_n(t)=\lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty} f_n(t)$ لذا

$$\lim_{t\to x_0} f(t)=\lim_{t\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(t)=\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x_0} f_n(t)=\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)=f(x_0) \quad ■$$

قضیه ۵ : فرض کنیم K فشرده باشد و

آ) $\{f_n(x)\}$ دنباله ای از توابع پیوسته بر K باشد ؛

ب) $\{f_n(x)\}$ به تابعی پیوسته ای چون $f(x)$ همگرای نقطه به نقطه باشد؛

پ) به ازای هر $x\in K$ ؛ $n=1,2,\ldots$ $\quad f_n(x)\ge f_{n+1}(x)$

در این صورت $f_n(x)\xrightarrow[K]{U} f(x)$.

برهان: تعریف می کنیم : $g_n(x)=f_n(x)-f(x)$ و کافیست ثابت کنیم $g_n(x)\xrightarrow[K]{U} 0$ یعنی

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad n \geq N \Rightarrow 0 \leq g_n(x) < \varepsilon \quad (\forall x \in K)$$

چون f_n ها و f پیوسته اند بنابراین g_n ها نیز پیوسته اند و چون $f_n \xrightarrow{pw} f$ لذا $g_n \xrightarrow{pw} 0$.

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. تعریف می کنیم:

$$K_n = \{x \mid x \in K, g_n(x) \geq \varepsilon\}$$

از آنجایی که g_n پیوسته است لذا (بنا به نتیجه قضیه ۴-۸ رودین) K_n بسته و در نتیجه فشرده است (بنا بر قضیه ۲-۳۵ رودین). از طرفی

$$x_0 \in K_{n+1} \Rightarrow g_{n+1}(x_0) \geq \varepsilon \Rightarrow g_n(x_0) \geq \varepsilon \Rightarrow x_0 \in K_n \Rightarrow K_{n+1} \subset K_n$$

$$x_0 \in K \Rightarrow g_n(x_0) \to 0 \Rightarrow \exists n_1 \quad \forall n \geq n_1 \Rightarrow g_n(x_0) < \varepsilon \Rightarrow x_0 \notin K_n \Rightarrow x_0 \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$$

$$\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \varnothing$$

از طرفی N ی وجود دارد که $K_N = \varnothing$ چون اگر به ازای هیچ N ی K_N تهی نگردد ، طبق قضیه ۲-۳۶ رودین بایستی اشتراک آنها نیز نا تهی باشد که در این جا چنین نیست.

$$K_N = \varnothing \Rightarrow \forall n \geq N \Rightarrow 0 \leq g_n(x) < \varepsilon \Rightarrow g_n \xrightarrow[K]{U} 0 \quad \blacksquare$$

نرم سوپریمم : هرگاه X یک فضای متری باشد ، $\mathcal{C}(X)$ مجموعه تمام توابع مختلط پیوسته کراندار با قلمرو X خواهد بود. نرم سوپریمم را اینگونه تعریف می کنیم: $\|f\| = \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$

قضیه ۶ : متر نرم سوپریمم $\mathcal{C}(X)$ را به یک فضای متری تام بدل می کند.

برهان : اگر $\{f_n\}$ یک دنباله کشی در $\mathcal{C}(X)$ باشد :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad n, m \geq N \Rightarrow \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon \Rightarrow \exists f(x) \quad f_n(x) \xrightarrow[X]{U} f(x)$$

از همگرایی یکنواخت نتیجه می شود که f پیوسته و کراندار است لذا $f \in \mathcal{C}(X)$ پس $\mathcal{C}(X)$ تام است. $\blacksquare$

قضیه ۷ : فرض کنیم α بر $[a,b]$ صعودی باشد و $f_n \in R(\alpha;a,b)$ و $f_n(x) \xrightarrow[[a,b]]{U} f(x)$ در این صورت $f \in R(\alpha;a,b)$ و $\int_a^b f d\alpha = \lim\limits_{n \to \infty} \int_a^b f_n d\alpha$.

برهان :

$$\varepsilon_n = \sup_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| \Rightarrow f_n - \varepsilon_n \leq f \leq f_n + \varepsilon_n$$

$$\Rightarrow \int_a^b (f_n - \varepsilon_n) d\alpha \leq \underline{\int_a^b} f d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f d\alpha \leq \int_a^b (f_n + \varepsilon_n) d\alpha$$

$$\Rightarrow 0 \leq \underline{\int_a^b} f d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f d\alpha \leq 2\varepsilon_n \left(\alpha(b) - \alpha(a)\right) \xRightarrow{\varepsilon_n \to 0} \underline{\int_a^b} f d\alpha = \overline{\int_a^b} f d\alpha \Rightarrow f \in R(\alpha;a,b)$$

$$-\varepsilon_n \leq f - f_n \leq \varepsilon_n \Rightarrow -\varepsilon_n \left(\alpha(b) - \alpha(a)\right) \leq \int f d\alpha - \int f_n d\alpha \leq \varepsilon_n \left(\alpha(b) - \alpha(a)\right)$$

$$\Rightarrow \left| \int f d\alpha - \int f_n d\alpha \right| \leq \varepsilon_n \left(\alpha(b) - \alpha(a)\right) \xRightarrow{\varepsilon_n \to 0} \lim_{n \to \infty} \int f_n d\alpha = \int f d\alpha \quad \blacksquare$$

نتیجه : هرگاه $f_n \in R(\alpha;a,b)$ و $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ و سری به طور یکنواخت همگرا باشد آنگاه $\int_a^b f d\alpha = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n d\alpha$.

قضیه ۸ : فرض کنیم $\{f_n(x)\}$ چنان دنباله ای از توابع بر $[a,b]$ باشد که در این بازه مشتق پذیر اند و به ازای نقطه ای چون $x_0 \in [a,b]$ ، دنباله عددی $\{f_n(x_0)\}$ همگراست.هرگاه $\{f_n'(x)\}$ بر $[a,b]$ به طور یکنواخت همگرا باشد آنگاه $\{f_n(x)\}$ به تابعی چون $f(x)$ همگرای یکنواخت است و $f'(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n'(x)$.

برهان: $\varepsilon > 0$ را اختیار می کنیم چون $\{f_n(x_0)\}$ همگراست :

$$\exists N \quad \forall n,m \ge N \Rightarrow |f_n(x_0)-f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$f_n' \xrightarrow[{[a,b]}]{U} g \Rightarrow \exists M \quad \forall n,m \ge M \Rightarrow |f_n'(u)-f_m'(u)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

بنابر قضیه مقدار میانگین داریم:

$$|f_n(x)-f_m(x)-(f_n(t)-f_m(t))| \le |f_n'(u)-f_m'(u)||x-t| \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|f_n(x)-f_m(x)| \le \left|f_n(x)-f_m(x)-(f_n(x_0)-f_m(x_0))\right| + |f_n(x_0)-f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \exists f \quad f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{U} f$$

اکنون برای x ثابت تعریف می کنیم:

$$\phi_n(t) = \frac{f_n(t)-f_n(x)}{t-x} \Rightarrow \lim_{t\to x}\phi_n(t) = f_n'(x)$$

$$\phi(t) = \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \Rightarrow \lim_{t\to x}\phi(t) = f'(x)$$

$$|\phi_n(t)-\phi_m(t)| = \left|\frac{f_n(t)-f_n(x)}{t-x} - \frac{f_m(t)-f_m(x)}{t-x}\right| = \frac{|f_n(t)-f_n(x)-f_m(t)-f_m(x)|}{|t-x|}$$

$$\le \frac{|f_n'(u)-f_m'(u)||t-x|}{|t-x|} < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

بنابراین چون $f_n \xrightarrow{U} f$ لذا $\phi_n \xrightarrow[t\ne x]{U} \phi$ لذا

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x}\phi_n(t) = \lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty}\phi_n(t) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x) \quad \blacksquare$$

قضیه ۹ : تابعی حقیقی و پیوسته بر خط حقیقی هست که در هیچ نقطه مشتق پذیر نیست.

برهان : تابع ϕ را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$\phi(x) = |x| \qquad -1 \le x \le 1$$

$$\phi(x+2) = \phi(x)$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x)$$

توجه کنید که تابع ϕ تابعی متناوب با دوره تناوب ۲ است.

$$f_n(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x) \Rightarrow f_n(x) \le \left(\frac{3}{4}\right)^n = M_n$$

چون $\sum M_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ همگراست ، بنا به قضیه M-وایرشتراس $f(x)$ همگرای یکنواخت است و چون $f_n(x)$ ها پیوسته اند لذا $f(x)$ نیز پیوسته است. حال نشان می دهیم $f(x)$ در هیچ جا مشتق پذیر نیست.

عدد x و m را ثابت در نظر می گیریم و تعریف می کنیم :

$$\delta_m = \pm\frac{1}{2}4^{-m}$$

علامت مثبت یامنفی را برای δ_m طوری انتخاب می کنیم که هیچ عدد صحیحی بین $4^m(x+\delta_m)$ و $4^m x$ قرار نگیرد. این کار ممکن است چون $|\delta_m| = 1/2 \cdot 4^{-m}$. تعریف می کنیم:

$$\gamma_n = \frac{\phi(4^n(x+\delta_m))-\phi(4^n x)}{\delta_m}$$

وقتی که $n>m$ پس حداقل $n=m+1$ و لذا عبارت $4^n\delta_m=\pm\frac{1}{2}4^{n-m}$ زوج است و درنتیجه

$$\gamma_n = \frac{\phi(4^n x+2k)-\phi(4^n x)}{\delta_m} = \frac{\phi(4^n x)-\phi(4^n x)}{\delta_m} = 0$$

اما وقتی $0\le n\le m$ با توجه به اینکه $|\phi(s)-\phi(t)|\le|s-t|$ داریم:

$$|\gamma_n| = \frac{|\phi(4^n x+4^n\delta_m)-\phi(4^n x)|}{|\delta_m|} \le \frac{|4^n\delta_m|}{|\delta_m|} = 4^n \Rightarrow -4^n \le \gamma_n \le 4^n$$

از طرفی داریم:

$$g(\delta_m) = \left|\frac{f(x+\delta_m)-f(x)}{\delta_m}\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\gamma_n\right| = \left|\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{3}{4}\right)^n\gamma_n\right| = \left|\left(\frac{3}{4}\right)^m\gamma_m + \sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n\gamma_n\right| \ge 3^m - \sum_{n=0}^{m-1}3^n = \frac{1}{2}(3^m+1)$$

وقتی $m\to\infty$ داریم $\delta_m\to 0$ اما $g(\delta_m)\to\infty$ پس f مشتق پذیر نیست. ■

همپیوستگی : خانواده F از توابع مختلط مانند f را که بر E در فضای متری X تعریف شده اند ، بر E همپیوسته گوییم هرگاه برای هر $\varepsilon>0$ ، $\delta>0$ ی باشد که

$$x,y\in E\ ,\ d(x,y)<\delta\ ,\ f\in F \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

نکته : هر عضو یک خانواده همپیوسته ، به طور یکنواخت پیوسته است.

کراندار نقطه به نقطه: فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله ای از توابع باشد که بر مجموعه E تعریف شده اند. گوییم $\{f_n\}$ بر E نقطه به نقطه کراندار است هرگاه دنباله $\{f_n(x)\}$ برای هر x کراندار باشد ، بعبارتی تابعی متناهی مثل ϕ باشد که

$$|f_n(x)|<\phi(x) \quad (x\in E, n=1,2,\ldots)$$

کراندار یکنواخت : گوییم $\{f_n\}$ بر E بطور یکنواخت کراندار است هرگاه عددی مانند M باشد بطوریکه

$$|f_n(x)|<M \quad (x\in E, n=1,2,\ldots)$$

قضیه ۱۰ : هرگاه $\{f_n\}$ یک دنباله نقطه به نقطه کراندار از توابع مختلط بر مجموعه شمارشپذیر E باشد ، آنگاه $\{f_n\}$ زیر دنباله ای مانند $\{f_{n_k}\}$ دارد بطوریکه $\{f_{n_k}(x)\}$ به ازای هر $x\in E$ همگرا است.

برهان: فرض کنیم نقاط E به صورت $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ باشد . دنباله عددی $\{f_n(x_1)\}$ را در نظر بگیرید. چون این دنباله کراندار است پس یک زیر دنباله همگرا دارد که آن را با $\{f_{1n}(x_1)\}$ نشان می دهیم:

$$\{f_{1n}(x_1)\} = f_{11}(x_1), f_{12}(x_1), f_{13}(x_1), \ldots$$

حال دنباله عددی $\{f_{1n}(x_2)\}$ را در نظر بگیرید.{ توجه کنید که این دنباله همان زیر دنباله همگرا در نقطه x_1 است که در نقطه x_2 محاسبه شده است.} دنباله $\{f_{1n}(x_2)\}$ نیز کراندار است پس یک زیر دنباله همگرا دارد که آن را با نماد $\{f_{2n}(x_2)\}$ نمایش می دهیم:

$$\{f_{2n}(x_2)\} = f_{21}(x_2), f_{22}(x_2), f_{23}(x_2), \ldots$$

همین روال را برای نقاط $x_3, x_4, \ldots$ بکار می بریم.{توجه کنید که $\{f_{2n}\}$ همان دنباله $\{f_{1n}\}$ است که تعدادی از جملات آن حذف شده است.}

اکنون دنباله $\{g_n\}$ را اینگونه می سازیم که

$$g_1 = f_{11}, g_2 = f_{22}, g_3 = f_{33}, \ldots, g_n = f_{nn}, \ldots$$

دنباله $\{g_n(x_1)\}$ همگراست چون $\{g_n(x_1)\}$ زیر دنباله ای از دنباله ی همگرای $\{f_{1n}(x_1)\}$ است. { توجه کنید که هر زیر دنباله از یک دنباله همگرا، همگرا می باشد}

دنباله $\{g_n(x_2)\}$ همگراست چون $\{g_n(x_2)\}$ به استثنای جمله اول، زیر دنباله ای از دنباله ی همگرای $\{f_{2n}(x_2)\}$ است.

به همین ترتیب $\{g_n\}$ برای هر $x \in E$ همگرا می باشد. ∎

قضیه ۱۱ : هرگاه K یک فضای متری فشرده بوده و $n = 1,2,\ldots$ $\quad f_n \in \mathcal{C}(K)$ و $\{f_n\}$ بر K به طور یکنواخت همگرا باشد آنگاه $\{f_n\}$ بر K همپیوسته خواهد بود.

برهان : فرض کنید $\varepsilon > 0$ داده شده باشد

$$|f_n(x) - f_n(y)| \le |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - f_n(y)| \qquad (2)$$

از آنجا که $f_n \xrightarrow[K]{U} f$ و چون f_n ها پیوسته اند لذا f پیوسته است:

$$\exists n_1 \quad \forall n \ge n_1 \Rightarrow \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$$
$$\exists \delta' > 0 \quad |x - y| < \delta' \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$$
$$(1) \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

پس فقط کافیست به ازای $1 \le n \le n_1$ ثابت کنیم $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$.

چون f_n ها پیوسته و K فشرده است پس f_n ها پیوسته ی یکنواخت اند بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} |x - y| < \delta_1 \Rightarrow \quad |f_1(x) - f_1(y)| < \varepsilon \\ \vdots \\ |x - y| < \delta_{n_1 - 1} \Rightarrow \quad |f_{n_1 - 1}(x) - f_{n_1 - 1}(y)| < \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \delta = \min\{\delta', \delta_1, \ldots, \delta_{n_1 - 1}\}$$
$$\Rightarrow \quad |x - y| < \delta \Rightarrow \quad |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$$

بنابراین $\{f_n\}$ همپیوسته است. ∎

قضیه ۱۲ : هرگاه K فشرده و $n = 1,2,\ldots$ $\quad f_n \in \mathcal{C}(K)$ و $\{f_n\}$ بر K نقطه به نقطه کراندار و همپیوسته باشد آنگاه

الف- $\{f_n\}$ بر K به طور یکنواخت کراندار است.

ب- $\{f_n\}$ دنباله ای دارد که به طور یکنواخت همگراست.

برهان :

الف - فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. K فشرده است، چون $K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, \frac{\delta}{2})$ پس مجموعه $A = \{x_1, \ldots, x_r\} \subset K$ وجود دارد بطوری که :

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{r} B(x_i, \frac{\delta}{2})$$

چون $\{f_n\}$ همپیوسته است پس $\delta > 0$ وجود دارد که

$$|x - t| < \delta \Rightarrow \quad |f_i(x) - f_i(t)| < \varepsilon$$

چون $\{f_n\}$ نقطه به نقطه کراندار است، پس به طور ویژه برای مجموعه A داریم:

$$|f_n(x_i)| < M_i \qquad i = 1,2,\ldots,r$$

$$\forall x \in K \quad \exists x_j \in A \quad |x - x_j| \le \frac{\delta}{۲} < \delta \Rightarrow |f_i(x) - f_i(x_j)| < \frac{\varepsilon}{۲}$$

$$\Rightarrow |f_i(x)| < |f_i(x_j)| + \frac{\varepsilon}{۲} < M_j + \frac{\varepsilon}{۲} < \max\{M_۱, \ldots, M_r\} + \frac{\varepsilon}{۲} < M$$

بنابراین $\{f_n\}$ بر K به طور یکنواخت کراندار است.

ب – فرض کنیم E زیر مجموعه چگال شمارشپذیری از K باشد . مجموعه E وجود دارد چون K فشرده است و تعداد متناهی از گوی ها به شعاع r_i و مرکز x_i ، K را می پوشاند. حال می توان مجموعه x_i ها را توسعه داد تا مجموعه شمارشپذیر چگال در K تولید کرد.

دنباله $\{f_n\}$ روی E نقطه به نقطه کراندار است بنابراین طبق قضیه ۱۰ ، زیر دنباله ای مانند $\{f_{n_i}\}$ از $\{f_n\}$ وجود دارد که روی E نقطه به نقطه همگرا است. تعریف می کنیم $g_i = f_{n_i}$ و ثابت می کنیم $\{g_n\}$ به طور یکنواخت همگرا هستند.

اگر $\varepsilon > ۰$ و $\delta > ۰$ را اختیار کنیم داریم:

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, \delta)$$

بنابر چگال بودن E و فشردگی K ، مجموعه $B = \{x_۱, \ldots, x_m\} \subset E$ هست که

$$K \subset \bigcup_{i=۱}^{m} B(x_i, \delta) \qquad (۳)$$

چون برای $x_s \in B$ ، $\{g_n\}$ همگرای نقطه به نقطه است:

$$\exists N \quad \forall i, j \ge N \Rightarrow |g_i(x_s) - g_j(x_s)| < \varepsilon \qquad s = ۱, ۲, \ldots, m$$

بنابر (۳) برای هر $x \in K$ وجود دارد $x_s \in E$ که $|x - x_s| < \delta$. از همپیوستگی $\{f_n\}$ و اینکه $\{g_n\}$ زیر دنباله ای از $\{f_n\}$ است نتیجه می شود که

$$|g_i(x) - g_i(x_s)| < \varepsilon$$

بنابراین

$$|g_i(x) - g_j(x)| \le |g_i(x) - g_i(x_s)| + |g_i(x_s) - g_j(x_s)| + |g_j(x_s) - g_j(x)| < ۳\varepsilon$$

پس $\{g_n\}$ به طور یکنواخت همگرا است.

این قضیه ، مشابه قضیه ۳-۶ رودین است که روی دنباله توابع اعمال شده است. ■

قضیه وایرشتراس

قضیه ۱۳ : هرگاه f تابع مختلط پیوسته ای بر $[a,b]$ باشد ، دنباله ای از چندجمله ای ها مانند P_n هست بطوریکه

$$\lim_{n \to \infty} P_n(x) = f(x)$$

بطور یکنواخت بر $[a,b]$.

برهان:بدون اینکه خللی به کلیت قضیه وارد شود می توانیم فرض کنیم $[a,b] = [۰,۱]$ و $f(۰) = f(۱) = ۰$ و $f(x)$ را خارج از $[۰,۱]$ صفر تعریف می کنیم. دراین صورت f بر $\mathbb{R}$ به طور یکنواخت پیوسته است. قرار می دهیم :

$$Q_n(x) = c_n(۱ - x^۲)^n$$

که در آن c_n طوری اختیار شده است که $\int_{-۱}^{۱} Q_n(x)dx = ۱$. اکنون داریم:

$$\frac{۱}{c_n} = \int_{-۱}^{۱}(۱ - x^۲)^n = ۲\int_۰^۱ (۱ - x^۲)^n dx \ge ۲\int_۰^{۱/\sqrt{n}} (۱ - x^۲)^n dx \ge ۲\int_۰^{۱/\sqrt{n}} (۱ - nx^۲)dx = \frac{٤}{۳\sqrt{n}} > \frac{۱}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{c_n} > \frac{۱}{\sqrt{n}} \Rightarrow c_n < \sqrt{n}$$

در نامساوی فوق از نا مساوی برنولی $(۱ - x^۲)^n \ge ۱ - nx^۲$ استفاده شد.

$$۰ < \delta \le |x| \le ۱ \ , \ c_n < \sqrt{n} \Rightarrow ۰ \le Q_n(x) < \sqrt{n}(۱ - \delta^۲)^n \Rightarrow Q_n \xrightarrow[{[-۱,-\delta] \cup [\delta,۱]}]{U} ۰$$

اکنون تعریف می کنیم:

$$P_n(x)=\int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)dt \overset{u=x+t}{=\!=\!=} \int_{x-1}^{x+1} f(u)Q_n(u-x)du=\int_{0}^{1} f(u)Q_n(u-x)du$$

تغییر بازه در انتگرال فوق به این دلیل مجاز است که $f(u)$ در خارج بازه $[0,1]$ صفر است. $P_n(x)$ یک چند جمله ای بر حسب x است چون انتگرال آخر یک انتگرال معین روی u است و هرچه که به u بستگی داشته باشد نهایتا مقدار دهی می شود.

$$|P_n(x)-f(x)|=|\int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)dt-f(x)\int_{-1}^{1} Q_n(t)dt|=|\int_{-1}^{1}(f(x+t)-f(x))Q_n(t)dt|$$

$$\le\int_{-1}^{1}|f(x+t)-f(x)|Q_n(t)dt=\int_{-1}^{-\delta}|f(x+t)-f(x)|Q_n(t)dt+$$

$$\int_{-\delta}^{\delta}|f(x+t)-f(x)|Q_n(t)dt+\int_{\delta}^{1}|f(x+t)-f(x)|Q_n(t)dt \qquad (۴)$$

چون f پیوسته است داریم:

$$\exists\delta>0 \quad |t|<\delta \Rightarrow \quad |f(x+t)-f(x)|<\varepsilon \Rightarrow$$

$$\int_{-\delta}^{\delta}|f(x+t)-f(x)|Q_n(t)dt<\varepsilon\int_{-1}^{1} Q_n(t)dt=\varepsilon$$

از طرفی بنابر همگرایی یکنواخت Q_n، اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد ، داریم:

$$\int_{-1}^{-\delta}|f(x+t)-f(x)|Q_n(t)dt\le 2M\int_{-1}^{-\delta} Q_n(t)dt<2M(1-\delta)\varepsilon$$

$$\int_{\delta}^{1}|f(x+t)-f(x)|Q_n(t)dt\le 2M\int_{\delta}^{1} Q_n(t)dt<2M(1-\delta)\varepsilon$$

که در آن $M=\sup|f(x)|$. بنابر (۴) داریم:

$$|P_n(x)-f(x)|<[4M(1-\delta)+1]\varepsilon$$

بنابراین $P_n(x)\xrightarrow[[0,1]]{U} f(x)$. ■

نتیجه: به ازای هر بازه ای مانند $[-a,a]$ ، دنباله ای از چندجمله ای های حقیقی مانند P_n وجود دارد که $P_n(0)=0$ و $P_n(x)\xrightarrow[[-a,a]]{U}|x|$.

برهان : بنا بر قضیه قبل ، دنباله ای از چند جمله ای های $\{P_n^*\}$ وجود دارد که $P_n^*(x)\xrightarrow[[-a,a]]{U}|x|$. اگر تعریف کنیم $P_n(x)=P_n^*(x)-P_n^*(0)$ در این صورت اگر n به حد کافی بزرگ باشد، داریم:

$$\left|P_n(x)-|x|\right|=\left|P_n^*(x)-P_n^*(0)-|x|\right|\le\left|P_n^*(x)-|x|\right|+\left|P_n^*(0)-|0|\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \quad ■$$

جبر: خانواده $\mathcal{A}$ از توابع مختلط تعریف شده بر E را یک جبر گویند هرگاه برای هر ثابت $c\in\mathbb{C}$ داشته باشیم $c\in\mathcal{A}$ و برای هر $f,g\in\mathcal{A}$ داشته باشیم $f+g\in\mathcal{A}$, $fg\in\mathcal{A}$.

بطور یکنواخت بسته : هرگاه $\mathcal{A}$ دارای این خاصیت باشد که وقتی $f_n\in\mathcal{A}$ $(n=1,2,\dots)$ و $f_n\xrightarrow[E]{U} f$ و $f\in\mathcal{A}$ آنگاه گفته می شود $\mathcal{A}$ به طور یکنواخت بسته است.

بست یکنواخت : فرض کنیم $\mathcal{B}$ مجموعه تمام توابعی باشد که حدود دنباله های بطور یکنواخت همگرایی از اعضای $\mathcal{A}$ اند . در این صورت $\mathcal{B}$ را بست یکنواخت $\mathcal{A}$ می نامند.

مثال : اگر فضای متری $\mathcal{C}(X)$ با متر نرم سوپریمم را درنظر بگیریم، طبق قضیه ۲ ، دنباله $\{f_n\}$ نسبت به متر $\mathcal{C}(X)$ همگرا به f است اگر و فقط اگر $f_n\xrightarrow[X]{U} f$.

از اینرو زیر مجموعه های بسته $\mathcal{C}(X)$ را به طور یکنواخت بسته گویند و بست هر زیر مجموعه مانند $\mathcal{A}\subset\mathcal{C}(X)$ را بست یکنواخت $\mathcal{A}$ گویند.

نکته : معمولا بست یکنواخت $\mathcal{B}$ از $\mathcal{A}$ را با نماد $\bar{\mathcal{A}}$ نمایش می دهند.

قضیه ۱٤ : فرض کنیم $\bar{\mathcal{A}}$ بست یکنواخت جبر $\mathcal{A}$ مرکب از توابع کراندار باشد. در این صورت $\bar{\mathcal{A}}$ یک جبر به طور یکنواخت بسته است.

برهان: چون $\mathcal{A}\subset\bar{\mathcal{A}}$ پس چون هر ثابت $c\in\mathcal{A}$ لذا $c\in\bar{\mathcal{A}}$. از طرفی اگر $f,g\in\bar{\mathcal{A}}$ در این صورت دنباله هایی به طور یکنواخت همگرا مانند $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ از $\mathcal{A}$ وجود دارند که $f_n\xrightarrow{U}f$ و $g_n\xrightarrow{U}g$. واضح است که $f_n+g_n\in\mathcal{A}$ و $f_ng_n\in\mathcal{A}$ و داریم $f_n+g_n\xrightarrow{U}f+g\in\bar{\mathcal{A}}$ و $f_ng_n\xrightarrow{U}fg\in\bar{\mathcal{A}}$ لذا $\bar{\mathcal{A}}$ یک جبر به طور یکنواخت بسته است. ■

تعریف : فرض کنیم $\mathcal{A}$ خانواده ای از توابع بر مجموعه E باشد . در این صورت گوییم $\mathcal{A}$ نقاط E را جدا می کند هرگاه به هر جفت متمایز نقطه مانند $x_1,x_2\in E$ تابعی چون $f\in\mathcal{A}$ نظیر شده باشد که $f(x_1)\neq f(x_2)$. چنانچه به هر $x\in E$ تابعی مانند $g\in\mathcal{A}$ نظیر شده باشد که $g(x)\neq 0$ گوییم $\mathcal{A}$ در هیچ نقطه صفر نمی شود.

قضیه ۱۵ : فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر از توابع بر مجموعه E باشد و $\mathcal{A}$ نقاط E را جدا کند و در هیچ نقطه E صفر نشود. اگر $x_1,x_2\in E$ نقاط متمایزی باشند و c_1,c_2 ثابت هایی دلخواه باشند در این صورت $\mathcal{A}$ شامل تابعی مثل f است که $f(x_1)=c_1$ و $f(x_2)=c_2$.

برهان : چون $\mathcal{A}$ نقاط E را جدا می کند پس تابعی چون $g\in\mathcal{A}$ وجود دارد که $g(x_1)\neq g(x_2)$ لذا $g(x_1)-g(x_2)\neq 0$ اما تابع f با تعریف زیر دارای شرایط فوق است:

$$f(x)=\frac{g(x)-g(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)}c_1+\frac{g(x)-g(x_1)}{g(x_2)-g(x_1)}c_2$$

چون $f(x_1)=c_1$ و $f(x_2)=c_2$ و طبق خواص جبری $\mathcal{A}$ داریم $f\in\mathcal{A}$. ■

قضیه استون

قضیه ۱۶ : فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر از توابع حقیقی پیوسته بر مجموعه فشرده K باشد. هرگاه $\mathcal{A}$ نقاط K را جدا کند و در هیچ نقطه صفر نشود آنگاه بست یکنواخت $\bar{\mathcal{A}}$ از تمام توابع حقیقی و پیوسته بر K تشکیل شده است یعنی $\mathcal{A}$ در $\mathcal{C}(K)$ چگال است . ($\bar{\mathcal{A}}=\mathcal{C}(K)$).

برهان: این قضیه را در چهار مرحله ثابت می کنیم:

۱- هرگاه $f\in\bar{\mathcal{A}}$ آنگاه $|f|\in\bar{\mathcal{A}}$.

برهان : قرار می دهیم $a=\sup_{x\in K}|f(x)|$. در بازه $[-a,a]$ اگر $\varepsilon>0$ داده شده باشد ، چند جمله ای $P(y)$ وجود دارد که $\big|P(y)-|y|\big|<\varepsilon$. لذا اگر $y=f(x)$ داریم

$$\big|P(f(x))-|f(x)|\big|<\varepsilon \tag{۵}$$

که در آن $P(f(x))=\sum_{i=1}^{n}c_if^i(x)$. با توجه به اینکه $\bar{\mathcal{A}}$ یک جبر است ، $P(f(x))\in\bar{\mathcal{A}}$.

رابطه (۵) نشان می دهد برای هر $\varepsilon>0$ یک عضو از $\bar{\mathcal{A}}$ وجود دارد که فاصله آن از $|f|$ کمتر از ε است . بنابراین چون $\bar{\mathcal{A}}$ به طور یکنواخت بسته است پس $|f|\in\bar{\mathcal{A}}$. ■

۲- هرگاه $f\in\bar{\mathcal{A}}$ و $g\in\bar{\mathcal{A}}$ آنگاه $\min(f,g)\in\bar{\mathcal{A}}$ و $\max(f,g)\in\bar{\mathcal{A}}$.

برهان : این مطلب به سادگی از روابط زیر و خواص جبری $\bar{\mathcal{A}}$ حاصل می شود:

$\max(f,g)=\frac{f+g}{۲}+\frac{|f-g|}{۲}$ و $\min(f,g)=\frac{f+g}{۲}-\frac{|f-g|}{۲}$.

همچنین با تکرار می توان نشان داد که اگر $f_۱,\dots,f_n\in\bar{\mathcal{A}}$ آنگاه $\min(f_۱,\dots,f_n)\in\bar{\mathcal{A}}$ و $\max(f_۱,\dots,f_n)\in\bar{\mathcal{A}}$. ■

۳- هرگاه تابع حقیقی و بر K پیوسته f، نقطه $x\in K$ و $\varepsilon>۰$ مفروض باشند، تابعی مانند $g_x\in\bar{\mathcal{A}}$ وجود دارد که $g_x(x)=f(x)$ و $g_x(t)>f(t)-\varepsilon \quad (t\in K)$.

برهان:

$\mathcal{A}\subset\bar{\mathcal{A}}$ و $\mathcal{A}$ نقاط K را جدا می کند و در هیچ نقطه صفر نمی شود ، لذا $\bar{\mathcal{A}}$ نیز چنین است پس در شرایط قضیه قبل صدق می کند

$$\forall y\in K\quad \exists h_y\in\bar{\mathcal{A}}\quad s.t.\quad h_y(x)=f(x)\ ,\ h_y(y)=f(y)$$

توجه کنید که $f(x)$ و $f(y)$ را همان $c_۱,c_۲$ قضیه۱۵ در نظر گرفته ایم. اما h و f توابعی پیوسته اند لذا

$$\exists \mathbf{J}'_y\quad s.t.\quad \forall t\in\mathbf{J}'_y \Rightarrow\ |h_y(t)-h_y(y)|<\varepsilon/۲$$
$$\exists \mathbf{J}''_y\quad s.t.\quad \forall t\in\mathbf{J}''_y \Rightarrow\ |f(t)-f(y)|<\varepsilon/۲$$

که در آن $\mathbf{J}'_y$ و $\mathbf{J}''_y$ همسایگی هایی حول y هستند. با توجه به اینکه $h_y(y)=f(y)$ و با استفاده از نامساوی مثلثی داریم:

$$|h_y(t)-f(t)|<\varepsilon\qquad \forall t\in\mathbf{J}_y=\mathbf{J}'_y\cap\mathbf{J}''_y$$
$$h_y(t)>f(t)-\varepsilon\quad \forall t\in\mathbf{J}_y$$

از طرفی چون $K\subset\bigcup_{y\in K}\mathbf{J}_y$ که در آن $\mathbf{J}_y$ یک همسایگی از y است و K فشرده است لذا نقاط $y_۱,\dots,y_n$ وجود دارند که $K\subset\bigcup_{i=۱}^{n}\mathbf{J}_{y_i}$.

اکنون قرار می دهیم $g_x(t)=\max\{h_{y_۱}(t),\dots,h_{y_n}(t)\}$.

داریم $g_x\in\bar{\mathcal{A}}$ و $g_x(x)=f(x)$ و $g_x(t)>f(t)-\varepsilon\quad \forall t\in K$. ■

۴- هرگاه تابع حقیقی و بر k پیوسته f و $\varepsilon>۰$ مفروض باشند، تابعی مانند $u\in\bar{\mathcal{A}}$ وجود دارد که $|u(x)-f(x)|<\varepsilon\quad (x\in K)$.

برهان: توابع $g_x\in\bar{\mathcal{A}}$ که در مرحله ۳ ساخته شدند در نظر می گیریم. بنابر پیوستگی g_x و f داریم:

$$\exists \mathbf{J}'_x\quad \forall t\in\mathbf{J}'_x \Rightarrow\ |g_x(t)-g_x(x)|<\varepsilon/۲$$
$$\exists \mathbf{J}''_x\quad \forall t\in\mathbf{J}''_x \Rightarrow\ |f(t)-f(x)|<\varepsilon/۲$$

که در آن $\mathbf{J}'_x$ و $\mathbf{J}''_x$ همسایگی هایی حول x هستند. با توجه به اینکه $g_x(x)=f(x)$ و با استفاده از نامساوی مثلثی داریم:

$$|g_x(t)-f(t)|<\varepsilon\qquad \forall t\in\mathbf{J}_x=\mathbf{J}'_x\cap\mathbf{J}''_x$$
$$g_x(t)<f(t)+\varepsilon\quad \forall t\in\mathbf{J}_x$$

از طرفی چون $K\subset\bigcup_{x\in K}\mathbf{J}_x$ که در آن $\mathbf{J}_x$ یک همسایگی از x است و K فشرده است لذا نقاط $x_۱,\dots,x_m$ وجود دارند که $K\subset\bigcup_{i=۱}^{m}\mathbf{J}_{x_i}$.

اکنون قرار می دهیم $u(t)=\min\{g_{x_۱}(t),\dots,g_{x_m}(t)\}$. داریم $u\in\bar{\mathcal{A}}$ و $u(t)<f(t)+\varepsilon\quad \forall t\in K$ و از طرفی $u(t)>f(t)-\varepsilon\quad \forall t\in K$ لذا

$$|u(x)-f(x)|<\varepsilon\quad \forall x\in K$$

این گزاره به این معنی است که به ازای هر تابع حقیقی پیوسته f، تابعی از $\bar{\mathcal{A}}$ وجود دارد که به اندازه کافی به f نزدیک است. از آنجا که $\bar{\mathcal{A}}$ به طور یکنواخت بسته است لذا $f\in\bar{\mathcal{A}}$. بنابراین $\bar{\mathcal{A}}=\mathcal{C}(K)$. ■■

جبر خود الحاق: جبر $\mathcal{A}$ را خود الحاق گوییم هرگاه برای هر $f\in\mathcal{A}$ آنگاه $\bar{f}\in\mathcal{A}$.

قضیه ۱۷ : فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر خود الحاقی از توابع مختلط پیوسته بر مجموعه فشرده K بوده ، $\mathcal{A}$ نقاط K را جدا کند و در هیچ نقطه صفر نشود . دراین صورت $\bar{\mathcal{A}}$ از تمام توابع مختلط پیوسته بر K تشکیل شده است. بعبارت دیگر $\mathcal{A}$ در $\mathcal{C}(K)$ چگال است ($\bar{\mathcal{A}}=\mathcal{C}(K)$).

برهان: فرض کنیم $\mathcal{A}_R$ مجموعه تمام توابع حقیقی بر K باشد که به $\mathcal{A}$ متعلق اند. اگر $f\in\mathcal{A}$ پس توابع حقیقی u و v هستند که $f(x)=u(x)+iv(x)$. اما $u(x)=\frac{۱}{۲}f+\frac{۱}{۲}\bar{f}$ و بنابه خواص جبر $u\in\mathcal{A}$ و چون u حقیقی است پس $u\in\mathcal{A}_R$. از طرفی $-i.f(x)=-iu(x)+v(x)\in\mathcal{A}$ لذا مثل قبل داریم $v\in\mathcal{A}$ و چون v حقیقی است $v\in\mathcal{A}_R$. بعبارتی هر یک از مولفه های f متعلق به $\mathcal{A}_R$ هستند.

چون $\mathcal{A}$ نقاط K را جدا می کند پس برای هر $x_۱,x_۲\in K$ تابعی چون $f\in\mathcal{A}$ هست که $f(x_۱)\neq f(x_۲)$ پس دو حالت وجود دارد. یا $u(x_۱)\neq u(x_۲)$ و یا $v(x_۱)\neq v(x_۲)$ و چون هم u و هم v به $\mathcal{A}_R$ تعلق دارند پس $\mathcal{A}_R$ نقاط K را جدا می کند. همچنین برای هر $x\in K$ تابعی چون $f\in\mathcal{A}$ هست که $f\neq ۰$ پس یا $u\neq ۰$ و یا $v\neq ۰$. بنابراین $\mathcal{A}_R$ در هیچ نقطه از K صفر نمی شود.اکنون قضیه استون در مورد $\mathcal{A}_R$ صدق می کند. حال هر تابع پیوسته از اعداد مختلط مانند f را که در نظر بگیریم $f(x)=u(x)+iv(x)$ طبق قضیه استون :

$$\exists h_۱\in\mathcal{A}_R \quad s.t. \quad |u(x)-h_۱(x)|<\varepsilon/۲$$
$$\exists h_۲\in\mathcal{A}_R \quad s.t. \quad |v(x)-h_۲(x)|<\varepsilon/۲$$

حال تعریف می کنیم $z=h_۱+ih_۲$ و طبق خواص جبر $z\in\mathcal{A}$ و داریم:

$$|z(x)-f(x)|\leq|u(x)-h_۱(x)|+|v(x)-h_۲(x)|<\varepsilon$$

یعنی برای هر تابع مختلط پیوسته f ، یک عضو از $\mathcal{A}$ هست که به اندازه کافی به f نزدیک است. یعنی $\mathcal{A}$ در $\mathcal{C}(K)$ چگال است. ■

* نقل مطلب از دانش آماری فقط با ذکر منبع و نام نویسنده مجاز می باشد *

منابع:

1- Rudin , Walter, Principles of mathematical analysis , McGgraw-Hill , 1976

۲- اصول آنالیز ریاضی ، والتر رودین ، ترجمه دکتر علی اکبر عالم زاده ،انتشارات علمی و فنی ۱۳۶۲

Http://MiladZaman005.blogfa.com

گروه دانش آماری