بررسی یک سامانه‌ی آشوبناک

نویسنده

سید جمال میرکمالی

گروه دانش آماری– بهمن ۱۳۸۵

۱–۱ مقدمه

اهمیت علم ریاضیات و زیر مجموعه‌های آن امروزه بر کسی پوشیده نیست. نظریات بنیادین علم ریاضیات به جامعه‌های علمی کمک کرده است تا مفاهیم پیچیده‌ی علوم مختلف با نمادها و ادبیات علم ریاضیات ساده‌تر شوند و پژوهشگران این علوم بتوانند به آسانی منظور یکدیگر را بفهمند. امروزه نظریه‌ی مجموعه‌ها، تابع‌ها، حسابان، جبر و سایر موضوعات ریاضی به عنوان یک ضرورت برای همه‌ی علوم شناخته می‌شود.

اگرچه مفاهیم ریاضیات بسیاری از موانع را در زمینه‌ی تحقیقات علمی مرتفع کرده است اما گاهی اوقات مسائل را بیش از اندازه ساده جلوه می‌دهد بگونه‌ای که بعضی از پژوهشگران بدون آنکه ظرافت‌های مساله را در نظر بگیرند، به استناد چند قضیه‌ی ریاضی (که لزوما همیشه برقرار نیستند)، نظریاتی ارائه می‌کنند که فاقد پشتوانه‌ی ریاضی است. به عنوان مثال، به استناد بعضی از خواص توابع مثل پیوستگی، مشتق‌پذیری، انتگرال‌پذیری و ... که در بسیاری از قضایای ریاضی به عنوان خواص مطلوب شناخته می‌شود، فرمول‌هایی ارائه می‌شود که در نهایت ایجاد آشوب می‌کنند. در این مطالعه‌ی موردی، یک نمونه‌ی ساده از این توابع یعنی سهمی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱–۲ تکرار[1]

توابع زیر را در نظر بگیرید. $y = x^۲ + c$ و $y = x$. این توابع به ترتیب یک سهمی و یک خط راست را مشخص می‌کنند. حال اگر

$$f : x \to x^۲ + c$$

[1] Iteration

می‌توان مقدار تابع f را دوباره در f قرار دهیم و یک مقدار جدید بدست آوریم. حال دنباله‌ی مقادیر $\{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^n(x), \ldots\}$ را مدار[2] x گوییم. مقدار اولیه x را منشاء[3] مدار گویند که در آن

$$f^n(x) = \begin{cases} f(x) & n = 1 \\ f(f^{n-1}(x)) & n > 1 \end{cases}$$

رفتار این تابع را با در نظر گرفتن c به عنوان پارامتر، بررسی می‌کنیم. در ساده‌ترین حالت اگر $c = 0$ آنگاه:

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \begin{cases} \infty & |x| > 1 \\ 1 & |x| = 1 \\ 0 & |x| < 1 \end{cases}$$

در این حالت $\{0, \infty\}$ نقاط جاذب[4] نامیده می‌شوند، چون مدار x را به سمت خود جذب می‌کنند.

$x = \pm 1$ نیز نقاط ثابت دافع[5] نامیده می‌شوند.

وقتی $c > \frac{1}{4}$ آنگاه سهمی $y = x^2 + c$ بالای خط قطری $y = x$ است و لذا همه نقاط منشاء x به بی‌نهایت جذب می‌شوند. حال اگر $c = \frac{1}{4}$، یعنی $f(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \begin{cases} \infty & |x| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & |x| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

به جدول زیر که در آن مدار ٦ نقطه منشاء را نمایش می دهد توجه کنید:

Orbit[2]
Seed[3]
Attractor[4]
Repelling Fixed Point[5]

n \ x	±1	±0.75	±0.5	±0.25	±0.1	0
1	+1.25	+0.812	+0.5	+0.3125	+0.26	+0.25
2	+1.812	+0.910	+0.5	+0.3476562	+0.3176	+0.3125
3	+3.535	+1.078	+0.5	+0.3708648	+0.3508697	+0.3476562
4	+12.747	+1.412	+0.5	+0.3875407	+0.3731096	+0.9708648
5	+162.744	+2.246	+0.5	+0.4001878	+0.3892107	+0.3875407
6	+26485.994	+5.296	+0.5	+0.4101503	+0.4014850	+0.4001878
7	+701507907	+28.297	+0.5	+0.4182232	+0.4111902	+0.4101503
8	+4.921e+17	+800.985	+0.5	+0.4249107	+0.4190774	+0.4182232
9	+2.421e+35	+64158.262	+0.5	+0.4305491	+0.4256258	+0.4291070
10	+5.864e+70	+4.116e+11	+0.5	+0.4353725	+0.4311573	+0.4305491
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
∞	∞	∞	+½	+½	+½	+½

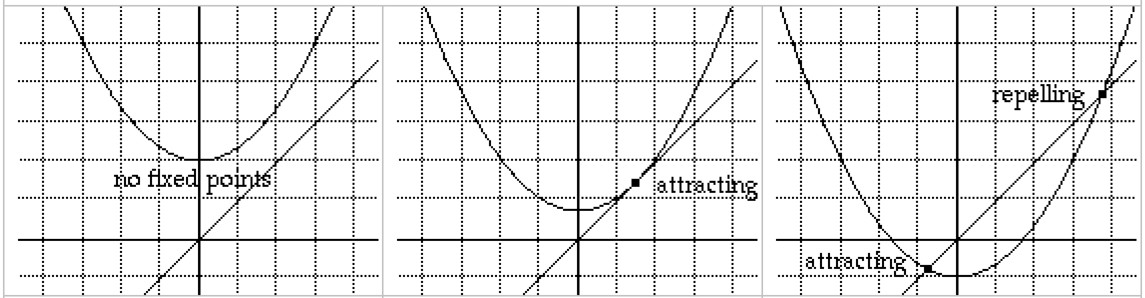
تقاطع خط قطری و سهمی در دو نقطه است که از حل معادله $x^۲ + c = x$ حاصل می‌شود. با کمی محاسبه می‌توان نشان داد که ریشه کوچکتر معادله، نقطه جاذب و ریشه بزرگتر، نقطه ثابت دافع است. این مطلب را برای $c = ۰$ نشان دادیم. اکنون برای $c = -\frac{۳}{۴}$ این مطلب را بررسی می‌کنیم:

$$f(x) = x^۲ - \frac{۳}{۴} \quad \Rightarrow \quad r_۱ = -\frac{۱}{۲} \;\; , \;\; r_۲ = \frac{۳}{۲}$$

به جدول زیر که مدار ٦ نقطه منشاء را نشان می‌دهد توجه کنید:

n \ x	±1.75	±1.5	±1	±0.75	±0.5	±0.25
1	+2.31	+1.5	+0.25	−0.1875	−0.5	−0.6875
2	+4.59	+1.5	−0.6875	−0.71484375	−0.5	−0.2773437
3	+20.38	+1.5	−0.2773437	−0.2389984	−0.5	−0.6730804
4	+414.93	+1.5	−0.6730804	−0.6928797	−0.5	−0.2969627
5	+172173.29	+1.5	−0.2969627	−0.2699176	−0.5	−0.6618131
6	+2.964e+10	+1.5	−0.6618131	−0.6771444	−0.5	−0.3120033
7	+8.787e+20	+1.5	−0.3120033	−0.2947537	−0.5	−0.6525639
8	+7.721e+41	+1.5	−0.6525639	−0.6650421	−0.5	−0.3240428
9	+5.962e+83	+1.5	−0.3240428	−0.3077189	−0.5	−0.6449962
10	overflow	+1.5	−0.6449962	−0.6553090	−0.5	−0.3339798
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
∞	∞	+1½	−½	−½	−½	−½

نقاط ثابت برای برخی مقادیر پارامتر c



$c > ¼$ | $c = ¼$ | $-¾ < c < ¼$

اگر مقدار $c < -\frac{۳}{۴}$ باشد، مدارهایی که قبلا به مقدار کمتر ریشه جذب می‌شدند، اینک بین دو مقدار مجزا نوسان می‌کنند. در حقیقت نقطه ثابت جاذب، دو شعبه[٦] می‌شود؛ در حقیقت مدار دیگر پایدار نخواهد بود، بلکه بین دو مقدار متناوب است. اگر c بیشتر از این منفی باشد، انشعاب‌های دیگری هم رخ خواهد داد و دوره تناوب ٤، ٨، ١٦ تا بی‌نهایت خواهد بود. به هر حال فاصله بین انشعاب‌های متوالی به صفر می‌رسد و برای $c < -۱.۴$ انشعاب‌ها به بی‌نهایت می‌رسد. در حقیقت مدارهایی که پیش از این متناوب بودند، اکنون در یک مدار نامتناوب سرگردانند. چنین رفتارهایی را که ارگودیک[٧] می‌نامند، جزء مشخصه‌های آشوب[٨] است. بعلاوه مقادیر منشاء که در ابتدا نزدیک یکدیگر بودند، پس از چند تکرار در مدارهایی حرکت می‌کنند که بسیار متفاوتند. این رفتار، که حساسیت و تبعیت از شرایط اولیه را نشان می‌دهد، آشوبناک[٩] گفته می‌شود و مقادیر پارامتر c که برای آن رفتار آشوبی به وجود می‌آید، رژیم آشوبناک[١٠] می‌نامند.

[6] *Bifurcated*
[7] *Ergodic*
[8] *Chaos*
[9] *Chaotic*
[10] *Chaotic Regime*

۱–۳ انشعاب

یک رویکرد مستقیم برای مدارها از طریق نمایش گرافیکی و با استفاده از قوانین زیر حاصل می شود:

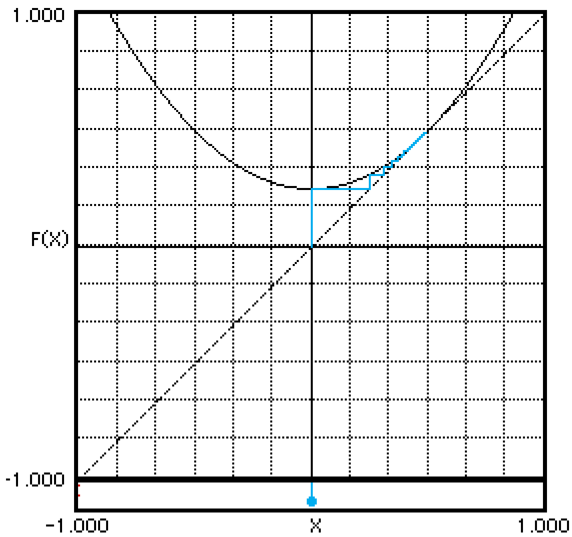
۱– دو منحنی را روی یک صفحه مختصات رسم کنید.

۲– یک خط عمودی رسم کنید تا سهمی را قطع کند.

۳– یک خط افقی از محل تقاطع رسم کنید تا خط قطری را قطع کند.

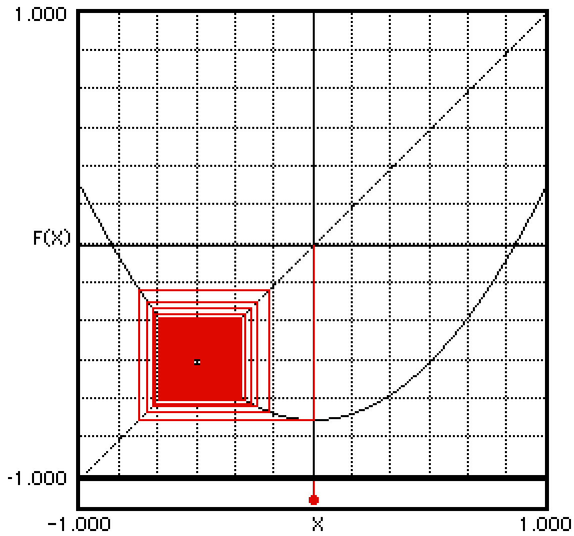
٤– مرحله ۲ را با نقطه جدید اجرا کنید.

ذیلا یک سری نمودارهای مربوط به جزییات رفتارهای گفته شده، ارائه شده است. این نمودارها به دیاگرام وب[11] یا دیاگرام تار عنکبوتی شناخته می‌شوند.

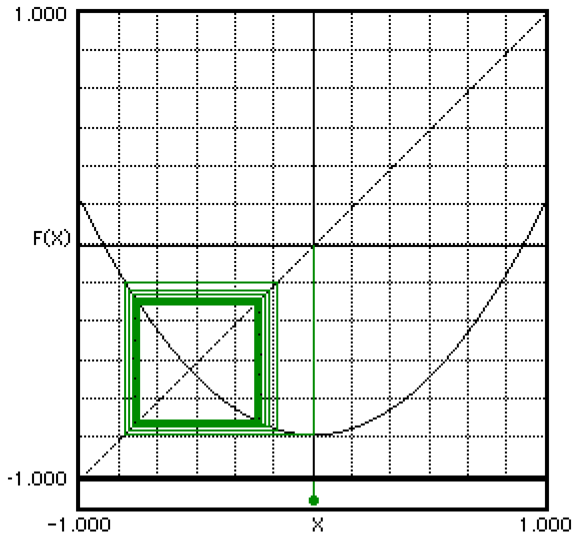


این نمودار یک نقطه $x = ۰$ را نشان می‌دهد که برای $c = ۰/۲۵$ به ۰/۵ همگرا است. با بررسی بیشتر مشخص می‌شود که این همگرایی به صورت مجانبی است.

[11] Web Diagram

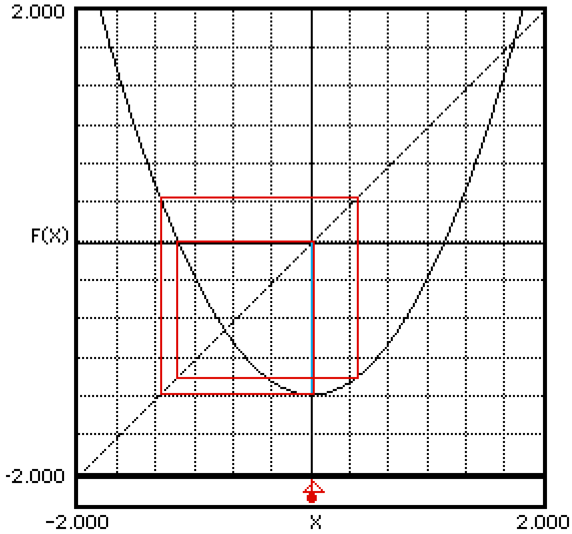


در این نمودار $c = -۰/۷۵$ می‌باشد. توجه کنید که چگونه مدار به یک نقطه جاذب می‌رسد. بعد از ۱۰۰۰ مرحله هنوز یک سوراخ در مرکز مدار قابل مشاهده است.

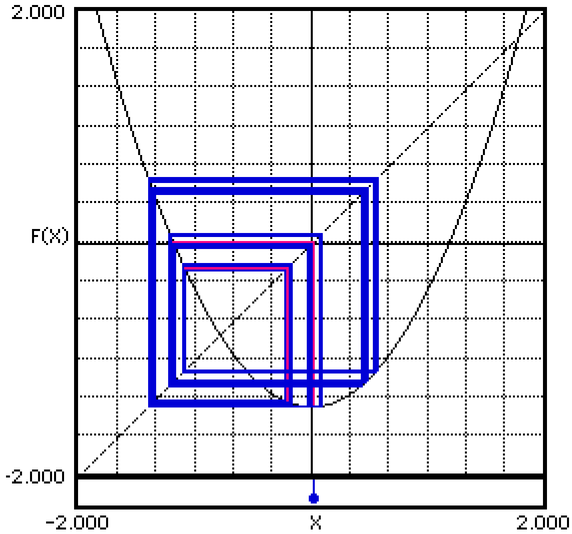


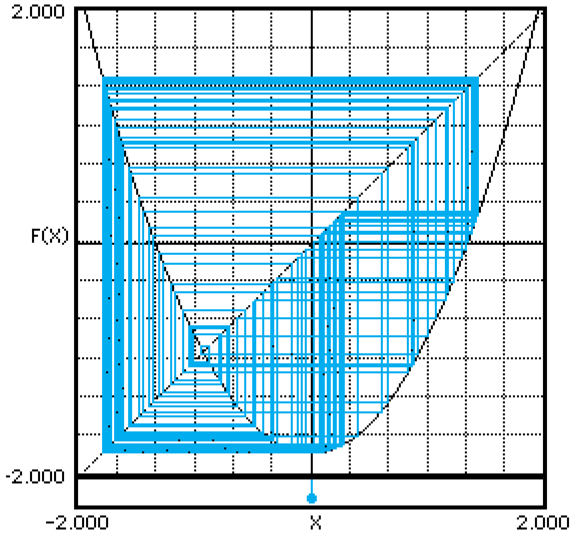
وقتی $c = -\frac{۱۳}{۱۶}$ است مدار در دو نقطه باقی می‌ماند. مدار در $-\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۳}{۴}$ جذب می‌شود.

وقتی $c = -۱/۳$ مدار روی مقادیر $-۱/۲۹۹۶۲۲۴۶۳۷$ ، $۰/۳۸۹۰۱۸۵۴۸۳$ ، $-۱/۱۴۸۶۶۴۵۶۹۱$ و $۰/۰۱۹۴۳۰۲۹۲۳$ نوسان می‌کند.



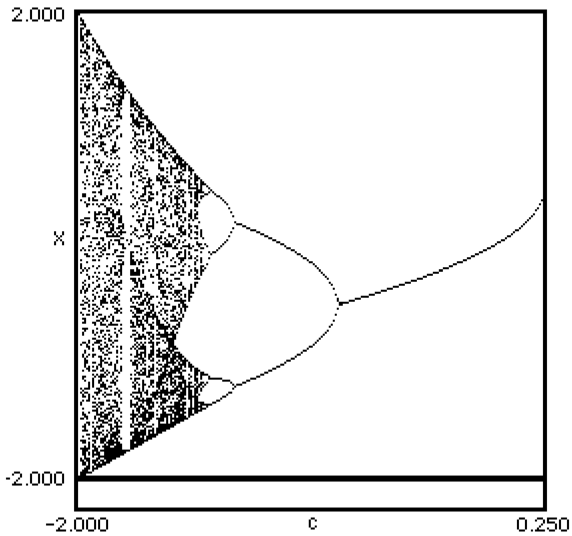
این مدار با مقدار $c = -۱/۴۰۱۵$ رسم شده است. اگر چه این نمودار مشابه دیاگرام قبل است اما، گام‌ها تکرار نمی‌شوند، بلکه روی یک نوار به هم می‌چسبند. تغییر کوچک در شرایط اولیه مداری می‌دهد که بطور آشکار متفاوت است. در $c = -۱/۴$ مدار ۳۲ دوره تناوب دارد اما اکنون بی‌نهایت دوره تناوب دارد.





در $c = -۱/۸$ مدار هر ناحیه از زیر بازه $[-۲,۲]$ را می‌پوشاند. این شکل فقط زیرمجموعه کوچکی از همه نقاطی که مدار می پیماید، نشان می‌دهد.

یک راه دیدن رفتار عمومی نگاشت $f : x \to x^۲ + c$ رسم مدارها به عنوان تابعی از c است. ما همه نقاط را نمایش نمی‌دهیم، فقط شاخص‌ترین آنها را رسم می کنیم. چند صد مرحله از مدار را کنار می‌گذاریم تا مدار روی رفتار بخصوص خود واقع شود. چنین دیاگرامی، دیاگرام انشعابی[۱۲] نامیده می‌شود.



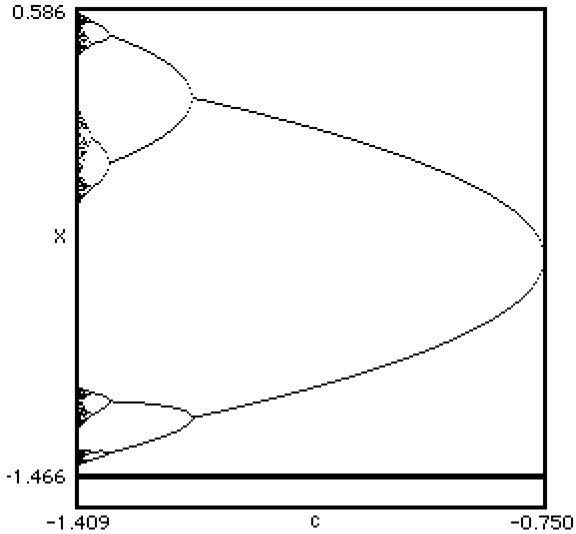
در اینجا دیاگرام انشعاب را به طور کامل مشاهده می‌کنیم. مقادیر خارج $[-۲,۰/۲۵]$ کنار گذاشته شده‌اند چون مدار آنها به بی‌نهایت می‌رود. توجه کنید که چگونه یک نقطه جاذب مکررا منشعب می‌شود و بعد آشوبناک می‌شود.

به دریچه موجود در $c = -۱/۸$ توجه نمایید.

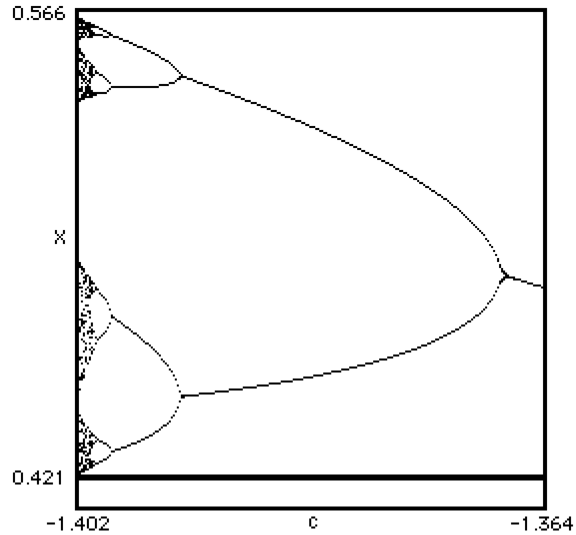
این محدوده را با جزییات بیشتری بررسی می‌کنیم

[12] *Bifurcation Diagram*

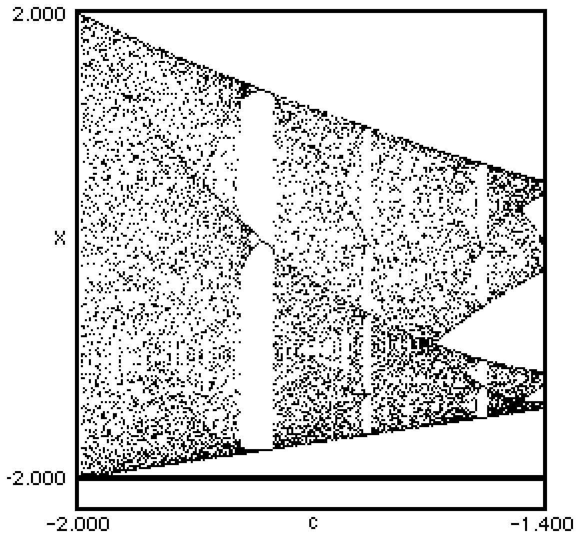
در اینجا یک بزرگنمایی از محدوده‌ی دو برابر شدن دوره تناوب[۱۳] می‌بینیم. به انشعابات متوالی توجه کنید.



با بزرگ کردن گوشه بالا و سمت چپ تصویر می‌بینیم که یک تکرار از ساختار کلی دیاگرام وجود دارد. محدوده دو برابر شدن دوره تناوب خودسانی[۱۴] را نشان می‌دهد، به این معنی که نواحی کوچک دیاگرام مشابه نواحی بزرگ هستند. این خاصیت در سایر قسمت های دیاگرام نیز مشاهده می‌شود.

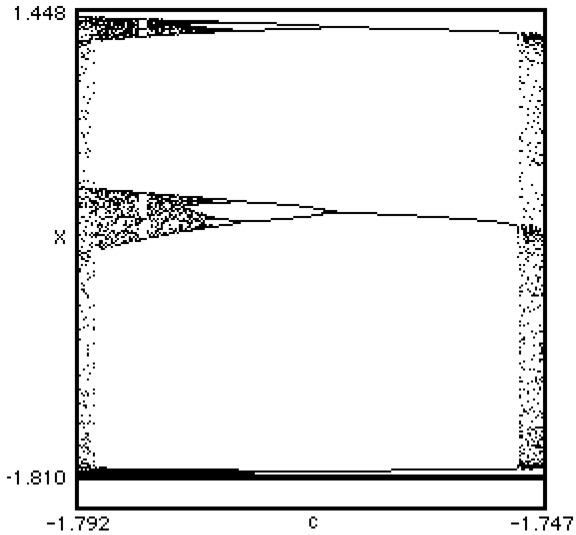


[13] *Period-Doubling*
[14] *Self-Similarity*

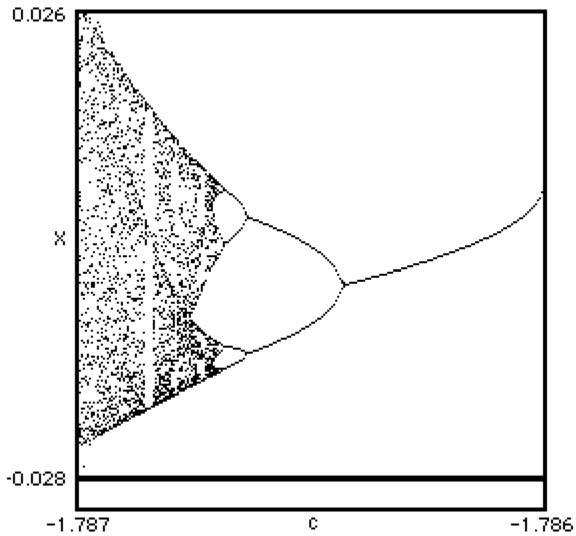


در اینجا یک بزرگنمایی از رژیم آشوبناک می‌بینیم. به دریچه‌های تناوبی داخل محدوده آشوب توجه کنید.

اکنون بزرگنمایی را بیشتر می‌کنیم.



ساختار دریچه، تکرارهایی از ساختار کلی دیاگرام انشعاب است. دو برابر شدن دوره تناوب مانند قبل است اما در ۳ ضرب شده است یعنی ...,۳,۶,۱۲ به جای ...,۱,۲,۴. به دریچه‌های داخل هر قطعه توجه کنید.



این نمودار، یک بزرگنمایی است که روی قطعه وسط دریچه انجام شده است. ما اکنون ۱۰۰۰ بار بزرگنمایی کرده‌ایم، این دیاگرام مشابه دیاگرام اولیه می‌باشد.

۴–۱ نتیجه‌گیری

در بخش‌های قبل مشخصه‌های آشوبناک توابع مشهور سهمی مورد بررسی قرار گرفت. لازم به ذکر است که سهمی‌ها از جمله‌ی توابعی هستند که دارای بسیاری از ویژگی‌های مطلوب مانند، پیوستگی، مشتق‌پذیری و انتگرال‌پذیری هستند. همچنین سادگی فرمول سهمی نیز مانع از بروز رفتارهای آشوبناک نمی‌گردد. البته این بدان معنی نیست که باید از توابعی که دارای خواص آشوبناک هستند اجتناب کرد بلکه این توابع نیازمند بررسی‌های اصولی ریاضی هستند و نباید برای آن‌ها از روش‌های به اصطلاح میانبر استفاده کرد. در آخر به پژوهشگران علوم مختلف توصیه می‌گردد قبل از ارائه‌ی فرمول‌های ریاضی، جنبه‌های آشوبناک آن فرمول‌ها را بررسی کنند.

مرجع‌ها:

[1] Elert, Glenn (2005). The Chaos Hypertextbook. Mathematics in the age of computer, <http://hypertextbook.com/chaos/>.
[2] Falconer, Kenneth (2003). Fractal Geometry, Second Edition. John Wiley.

ضمیمه:

اگر از Acrobat Reader استفاده می‌کنید روی علامت سنجاق دو بار کلیک کنید تا فایل Orbit.xls باز شود.