اصول شمارش

نویسنده

سید جمال میرکمالی

گروه دانش آماری– مرداد ۱۳۸۶

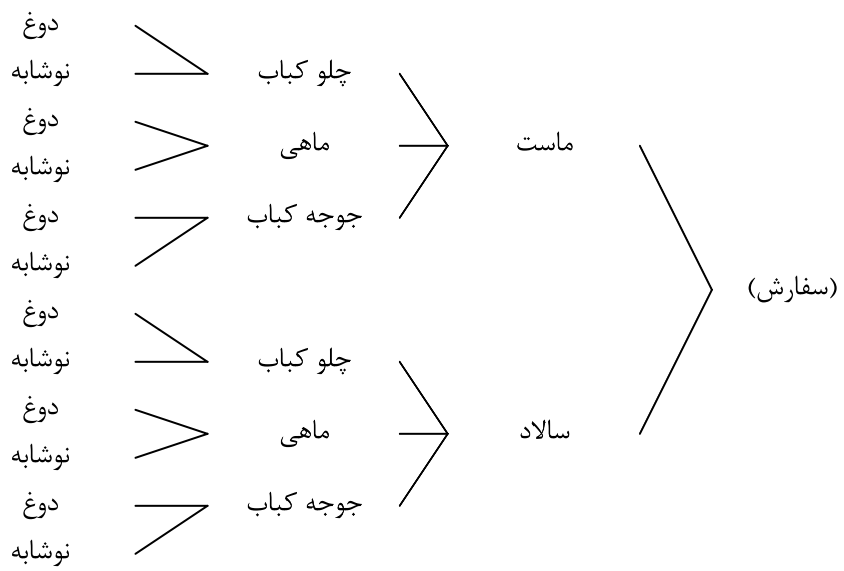
۱- قوانین شمارش – ترکیبیات

بسیاری از مسائل نظریه احتمال نیازمند این است که تعداد حالت هایی را که یک پیشامد رخ می دهد ، بشماریم. بدین منظور ما مفاهیم جایگشت و ترکیب را مطالعه می کنیم.

آزمایشی را در نظر بگیرید که در چند مرحله انجام می شود. قصد داریم ، تعداد تمام حالات ممکن برای این آزمایش را بشماریم.

مثال ۱ : فرض کنید وارد یک رستوران می شوید و می خواهید از منوی رستوران ، غذای خود را انتخاب کنید. اگر منوی رستوران به این فرم باشد ، به چند طریق می توانید غذا سفارش دهید؟

چاشنی	غذا	نوشیدنی
ماست	چلو کباب	دوغ
سالاد	ماهی	نوشابه
	جوجه کباب	



با شمردن تعداد حالات ، مشخص می شود که ۱۲ حالت برای سفارش غذا وجود دارد.

برای دانستن تعداد حالات چنین آزمایشی ، رسم چنین درختی برای به دست آوردن مجموعه تمام حالت های ممکن ، لزوم ندارد. با استفاده از اصل اساسی شمارش ، می توانیم تعداد حالات ممکن را به دست آوریم.

اصل اساسی شمارش

فرض کنید یک آزمایش ، از دو مرحله ی مجزا تشکیل شده باشد. اگر مجموعه حالات مرحله اول n عضو و مجموعه حالات مرحله دوم m عضو داشته باشد ، دراین صورت ، مجموعه حالات این آزمایش $n.m$ عضو دارد.

تعمیم اصل اساسی شمارش

فرض کنید یک آزمایش ، از r مرحله ی مجزا تشکیل شده باشد. اگر مجموعه حالات مرحله اول $n_۱$ عضو و مجموعه حالات مرحله دوم $n_۲$ عضو و ... و مجموعه حالات مرحله rام ، n_r عضو داشته باشد ، دراین صورت ، مجموعه حالات این آزمایش $n_۱ \cdot n_۲ \cdot \ldots \cdot n_r$ عضو دارد.

مثال ۱ (ادامه) : سفارش غذا دارای سه مرحله است. مرحله اول (انتخاب چاشنی) ۲ حالت دارد ، مرحله دوم (انتخاب غذا) ۳ حالت دارد و مرحله سوم (انتخاب نوشیدنی) ۲ حالت دارد. بنابراین طبق تعمیم اصل اساسی شمارش ، سفارش غذا $۲ \times ۳ \times ۲$ یعنی ۱۲ حالت دارد.

۲- مدل جایگاه

برای محاسبه تعداد حالات ممکن یک آزمایش ، استفاده از جایگاه هایی برای نمایش مراحل آزمایش بسیار سود مند است:

(جایگاه چاشنی)   (جایگاه غذا)   (جایگاه نوشیدنی)

همانطور که می بینید برای هر مرحله از آزمایش، یک جایگاه درنظر گرفته ایم. حال زیر هر جایگاه تعداد حالت های هر مرحله را نوشته و در هم ضرب می کنیم.

$$۱۲ = ۲ \times ۳ \times ۲$$

مثال ۲ : با حروف r,a,n,d,o,m چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت؟

۵   ۵   ۵   ۵   ۵

تعداد کلمات برابر با $۵^۵ = ۳۱۲۵$ است.

مثال ۳ : با حروف r,a,n,d,o,m چند کلمه ۵ حرفی بدون تکرارمی توان نوشت؟

۱   ۲   ۳   ۴   ۵

تعداد کلمات برابر با $۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲۰$ است. توجه کنید که در این مثال ، مراحل از یکدیگر مجزا نیستند. یعنی نتیجه مرحله اول بر نتیجه مراحل بعد تاثیر می گذارد اما روی تعداد حالات مراحل بعد تاثیر نمی گذارد ، بنابراین هنوز هم می توان از اصل شمارش استفاده کرد.

فاکتوریل

اگر $n \in \mathbb{N}$ باشد ، در این صورت $n!$ (n فاکتوریل) به صورت زیر تعریف می شود:

$$n! = ۱ \times ۲ \times \cdots \times n$$

و $۰! = ۱$ تعریف می گردد.

۳- جایگشت

تعریف ۱ : فرض کنید A یک مجموعه متناهی باشد. یک جایگشت A ، نگاشتی یک به یک از A بتوی A است.
مجموعه $A=\{a,b,c\}$ را در نظر بگیرید. تعداد ترتیب های متفاوت عناصر A چندتا است؟

$$\begin{array}{cc} abc & acb \\ bca & bac \\ cab & cba \end{array}$$

تعداد ترتیب ها برابربا ۶ است. این نتیجه را می توان با استفاده از اصل شمارش هم به دست آورد.

قضیه ۱ : تعداد کلیه جایگشت های یک مجموعه n عضوی A ، برابر است با $n!$.

مثال ۴ : تعداد جایگشت های یک مجموعه سه عضوی برابر با $۳!=۶$ است.

تعریف ۲ : فرض کنید A یک مجموعه n عضوی باشد و k عدد صحیحی بین ۰ و n باشد ، یک k-جایگشت A ، یک فهرست مرتب از زیرمجموعه های k عضوی A است.

مثال ۵ : مجموعه $A=\{a,b,c\}$ را در نظر بگیرید. تعداد ۲-جایگشت های A چندتا است؟

$$\begin{array}{cc} ab & ba \\ ac & ca \\ bc & cb \end{array}$$

بنابراین ۶ تا ۲-جایگشت از عناصر A وجود دارد.

قضیه ۲ : تعداد همه k-جایگشت های مجموعه n عضوی A برابر است با $\frac{n!}{(n-k)!}$.

مثال ۶ : با حروف r,a,n,d,o,m چند کلمه ۳ حرفی بدون تکرارمی توان نوشت؟
تعداد کلمات برابر با $۶۰=\frac{۵!}{۲!}=\frac{۵!}{(۵-۳)!}$ است.

مثال ۷ : چند ترتیب متفاوت از حروف کلمه $amar$ بدون تکرار می توان نوشت؟ برای پاسخ به این سوال باید توجه داشت که حرف a دو بار تکرار شده است و اصولا با تعریف جایگشت طبق تعریف ۱ مطابقت نمی کند. چون در یک مجموعه ، تکرار یک عنصر بی معنی است. اما با یک ترفند می توان اینگونه مسائل را حل کرد. اگر کلمه $a_۱ma_۲r$ را در نظر بگیریم ، تعداد $۴!$ کلمه می توان ساخت. توجه کنید که کلمات $a_۱a_۲mr$ و $a_۲a_۱mr$ در این حالت متمایز شمرده می شوند. اما در مورد مساله ما این دو حالت ، تنها $aamr$ می شوند. این حالات ، حالاتی هستند که فقط حروف تکراری با هم جابجا می شوند. با تقسیم تعداد جایگشت های کلی بر تعداد جایگشت های حروف تکراری ، تعداد حالات مطلوب حاصل می شود.

قضیه ۳ : به طور کلی ، تعداد جایگشت های n شیء که n_1 تا مثل هم ، n_2 تای دیگر مثل هم ، ... و n_r تا مثل هم هستند برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!}$$

مثال ۷(ادامه) : تعداد کلمات بدون تکرار از حروف $amar$ برابر است با

$$\frac{۴!}{۲!\,۱!\,۱!} = ۱۲$$

۴- ترکیب

معمولا انتخاب زیرمجموعه هایی از یک مجموعه A که دقیقا k عضو داشته باشند موضوع جالبی است.

مثال ۸ : تعداد زیر مجموعه های دو عضوی مجموعه $A = \{a,b,c\}$ چند تا است؟

$$\{a,b\} \quad \{a,c\} \quad \{b,c\}$$

یعنی ، ۳ زیر مجموعه ۲ عضوی ، از A وجود دارد.

قضیه ۴ : تعداد زیر مجموعه های k عضوی مجموعه n عضوی A برابر است با

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

مثال ۸(ادامه) : تعداد زیر مجموعه های ۲ عضوی مجموعه A برابر است با $\binom{۳}{۲} = \frac{۳!}{۲!\,۱!} = ۳$.

مثال ۹ : فرض کنید می خواهیم از بین ۵ سی دی صوتی از ۵ خواننده ، ۲ سی دی را خریداری کنیم. این کار به چند طریق امکان پذیر است؟

$$\binom{۵}{۲} = \frac{۵!}{۲!\,۳!} = ۱۰$$

لذا به ۱۰ طریق می توان این دو سی دی را انتخاب کرد.

نکته ۱ : برای انتخاب زیر مجموعه k عضوی از مجموعه n عضوی A می توان $n-k$ عضو از A را کنار بگذاریم یعنی داریم

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

نکته ۲ : برای انتخاب زیر مجموعه k عضوی از مجموعه n عضوی A به الگوی زیر توجه کنید. اگر عضو شماره ۱ مجموعه A را انتخاب کرده و از $n-۱$ عضو باقیمانده ، $k-۱$ عضو انتخاب کنیم ، یک زیر مجموعه k عضوی خواهیم داشت. اگر عضو شماره ۱ را انتخاب نکنیم و از $n-۱$ عضو باقیمانده ، k عضو انتخاب کنیم ، باز هم یک زیر مجموعه k عضوی خواهیم داشت. بنابراین داریم

$$\binom{n}{k} = \binom{n-۱}{k-۱} + \binom{n-۱}{k}$$

نکته ۳ : $\binom{n}{k}$ یک ضریب دو جمله ای نامیده می شود. علت آن مربوط به قضیه دو جمله ای است که ذیلا عنوان شده است.

قضیه ۵ : قضیه دو جمله ای:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

این عبارت با استفاده از استقرا قابل اثبات است.

نتیجه ۱ : تعداد زیر مجموعه های مجموعه n عضوی A برابر با 2^n است، چون

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$$

مثال ۱۰ : ۱۰ ورزشکار را باید به دو تیم A و B هر کدام با ۵ عضو تقسیم کنیم. این کار به چند طریق امکان پذیر است؟

این کار به ۲۵۲ طریق امکان پذیر است چون

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = 252$$

مثال ۱۱ : برای یک بازی بسکتبال می خواهیم ۱۰ ورزشکار را به دوتیم ۵ تایی تقسیم کنیم. این کار به چند طریق امکان پذیر است؟

به این نکته توجه کنید که این مثال با مثال قبل متفاوت است چراکه در این مثال ترتیب دو تیم اهمیتی ندارد.

مثلا ترکیب $\langle\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\},\{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5\}\rangle$ و $\langle\{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5\},\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}\rangle$ هیچ فرقی با هم ندارند.

پاسخ صحیح عبارتست از

$$\frac{\frac{10!}{5!5!}}{2!} = 126$$

ضرایب چند جمله ای

اگر بخواهیم مجموعه n عضوی A را به r گروه مجزا به اندازه های n_1 ، n_2 ، ... ، n_r به گونه ای که $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$ باشد ، تقسیم کنیم این کار به چند طریق امکان پذیر است؟

این آزمایش را به r مرحله تقسیم می کنیم. در مرحله اول به تعداد $\binom{n}{n_1}$ انتخاب برای گروه اول وجود دارد و در مرحله دوم به تعداد $\binom{n-n_1}{n_2}$ انتخاب برای گروه دوم وجود دارد و الی آخر. طبق اصل شمارش داریم:

مرحله ۱	مرحله ۲	...	مرحله r
$\binom{n}{n_1}$	$\binom{n-n_1}{n_2}$	...	$\binom{n-n_1-\dots-n_{r-1}}{n_r}$

با ضرب تعداد حالات مراحل ، تعداد حالات ممکن آزمایش برابر است با:

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\dots\binom{n-n_1-\dots-n_{r-1}}{n_r}=\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_r!}$$

معمولا این مقدار را به صورت $\binom{n}{n_1,n_2,\dots,n_r}$ نمایش می دهند و به آن یک ضریب چندجمله ای می گویند. دلیل آن هم در قضیه چندجمله ای است که ذیلا آورده شده است.

قضیه ۶ : قضیه چندجمله ای

$$(x_1+x_2+\dots+x_r)^n=\sum_{n_1+n_2+\dots+n_r=n}\dots\sum\binom{n}{n_1,n_2,\dots,n_r}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots x_r^{n_r}$$

که مجموع روی همه $n_1,\dots,n_r$ های صحیح نا منفی است که $n_1+n_2+\dots+n_r=n$ باشد.

۵- توزیع توپ ها

مثال ۱۲ : سه توپ به شماره های ۱,۲,۳ داریم. می خواهیم آن ها را بین دو ظرف متمایز توزیع کنیم. این کار به چند طریق امکان پذیر است؟

#۱	#۲
۱۲۳	ϕ
۱۲	۳
۱۳	۲
۲۳	۱
۱	۲۳
۲	۱۳
۳	۱۲
ϕ	۱۲۳

این کار به ۸ طریق امکان پذیر است.

قضیه ۷ : اگر n توپ متمایز داشته باشیم و بخواهیم آن ها را میان k ظرف متمایز توزیع کنیم ، این کار به k^n طریق امکان پذیر است.

مثال ۱۲(ادامه) : در این مثال $n=۳$ توپ متمایز و $k=۲$ ظرف متمایز داریم و این توزیع توپ ها به $۲^۳=۸$ طریق امکان پذیر است.

قضیه ۸ : اگر بخواهیم n توپ مشابه را ما بین k ظرف متمایز توزیع کنیم ، این کار به $\binom{n-۱}{k-۱}$ طریق امکان پذیر است.

مثال ۱۳ : تعداد جواب های صحیح و مثبت معادله $x+y+z=۸$ چندتا است؟
این مساله معادل با توزیع ۸ توپ مشابه بین ۳ ظرف متمایز است ، لذا تعداد جواب های صحیح و مثبت این معادله برابر با $۲۱=\binom{۷}{۲}=\binom{۸-۱}{۳-۱}$ است.

نکته ۵ : اگر بخواهیم n توپ مشابه را بین k ظرف متمایز توزیع کنیم بگونه ای که ظرف ها بتوانند خالی باشند ، این کار به $\binom{n+k-۱}{k-۱}$ طریق امکان پذیر است.

مثال ۱۴ : تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x+y+z=۸$ چندتا است؟
این مساله معادل با توزیع ۸ توپ مشابه بین ۳ ظرف متمایز است بگونه ای که ظرف ها بتوانند خالی باشند ، لذا تعداد جواب های صحیح و نا منفی این معادله برابر با $۴۵=\binom{۱۰}{۲}=\binom{۸+۳-۱}{۳-۱}$ است.

منابع:

[۱] راس،شلدون(۱۹۹۴) ،**مبانی احتمال**، ترجمه پارسیان ، همدانی، نشر شیخ بهایی – اصفهان ۱۳۷۹.
[2] Grinstead, Charles M. Snell, J. Laurie, **Introduction to Probability**.