می دانیم که اندازه گیری کمیت ها به بروز خطا منجر می شود. خطا ها دو نوع اند : ۱- قطعی[1] ۲- تصادفی[2]

خطاهای قطعی ، سیستماتیک و ناشی از عدم کارکرد ابزار های اندازه گیری ما هستند. بعضی از ابزار ها به طور صحیحی اصلاح نشده اند یا یک اشتباه توسط مشاهده گر حین خواندن اندازه از روی ابزار روی داده است.

خطاهای تصادفی ،خطا هایی هستند که قطعی نیستند. آنها ناشی از عوامل ناشناخته هستند. عواملی که تحت کنترل ما نیستند. به هر حال این خطا ها بوسیله روش های آماری ، اصلاح شدنی اند.

فرض کنید X مقدار یک کمیت باشد. اگر $X_1,\dots,X_n$ مقادیر مشاهده شده از n بار اندازه گیری (به یک اندازه قابل اعتماد) از کمیت داده شده باشد ، مقادیر خطا به صورت زیر داده می شود:

$$X_1 - X, X_2 - X, \dots, X_n - X$$

فرض کنید $\varepsilon_i = X_i - X$. در این صورت $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ خطا های اندازه گیری اند.

فرض کنید $\bar{X}$ (میانگین کل داده ها) مقدار با بیشترین احتمال باشد. در این صورت باقیمانده ها با $d_1,\dots,d_n$ تعریف می شوند که $d_i = X_i - \bar{X}$.

خطا ها و باقیمانده ها نه متقارن اند و نه ثابت اند. فرض می شود که آنها به صورت تصادفی تغییر می کنند. ما می دانیم که معمولا خطا های بزرگ رخ نمی دهند. تنها خطاهای کوچک معمولند و فراوان رخ می دهند. خطا ها از یک قانون مشخص پیروی می کنند که قانون **خطای نرمال گوس** نامیده می شود. این قانون می گوید که خطاها از مدل احتمالی زیر پیروی می کنند:

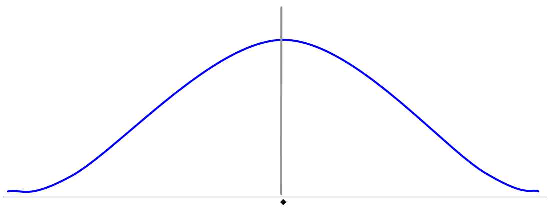
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$$

این عبارت می تواند با قرار دادن $f(x) = N$ و $h^2 = 1/(2\sigma^2)$ به صورت زیر ساده گردد:

$$N = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$$

عدد h به نام **شاخص دقت** شناخته می شود. فرمول فوق ما را قادر می سازد تا تعداد نسبی اندازه گیری N را که خطای x دارند ، بدانیم.

منحنی خطای گوس: این منحنی با رسم نقاط N و x روی یک کاغذ و رسم یک منحنی هموار بر آن به دست می آید.



واضح است که وقتی h بزرگ است ،N نیز بزرگ است . هر وقت شاخص دقت h بزرگ است ، نتیجه می گردد که تعداد زیادی از اندازه گیری ها با مقدار صحیح کمیت همخوانی دارد ، در حالیکه اگر h کم باشد ، تعداد کمتری از اندازه گیری ها با مقدار صحیح کمیت همخوانی دارد.

ما می توانیم احتمال اینکه یک اندازه گیری منفرد ، بین حدود متفاوتی قرار گیرد را مشخص کنیم. بنابراین اگر حدود $\pm a$ باشد

$$P(-a \le X \le a) = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-h^2 x^2} dx$$

مقادیر این انتگرال برای مقادیر مختلف a جدولبندی شده است. همچنین تابع خطا به صورت زیر تعریف می شود:

---

[1] Determinate
[2] Random

$$erf(t)=\frac{۲}{\sqrt{\pi}}\int_۰^t e^{-y^۲}dy$$

انواع مختلفی از خطا ها وجود دارند که مهمترین آنها عبارتند از:

۱- **خطای محتمل**[1] **یا چارک ها**[2]: این نوع از خطا توسط فرانسیس گالتن[3] تعریف شد.

$$pr.er.f(\alpha h)=\frac{۱}{۲}\Rightarrow P(-\alpha<t<\alpha)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\alpha}^{\alpha}e^{-h^۲u^۲}du=\frac{۱}{۲}$$

$$\therefore \frac{۲}{\sqrt{\pi}}\int_۰^{h\alpha}e^{-x^۲}dx=\frac{۱}{۲}\overset{\substack{Normal\\Table}}{\Rightarrow}\frac{\alpha}{\sigma}=۰.۶۷۶۹\Rightarrow\alpha\cong\frac{۲}{۳}\sigma$$

۲- **متوسط خطای لاپلاس**: این خطا توسط فرمول زیر محاسبه می شود:

$$\eta=\int_{-\infty}^{\infty}|x|Ndx=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|x|e^{-h^۲x^۲}dx=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\sigma\cong۰.۷۹۷۹\sigma\cong\frac{٤}{۵}\sigma$$

۳- **میانگین خطای گوس**: این خطا بصورت زیر تعریف می شود: $\alpha=۱/(h\sqrt{۲})$.

میانگین حسابی همه اندازه ها

فرض کنید n اندازه مستقل تولید شده است که i امین اندازه خطایی مساوی x_i دارد.اکنون احتمال x_i, x_i+dx_i بوسیله $p_i=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^۲x_i^۲}dx_i$ داده شده است.

چون اندازه ها مستقل اند ، احتمال اینکه خطای x_i در فواصل به طول dx_i باشد ، به صورت زیر است:

$$p=\prod p_i=\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^۲\sum_{i=۱}^{n}x_i^۲}\prod_{i=۱}^{n}dx_i$$

چون h ثابت است ، p وقتی کمترین مقدار را دارد که $\sum_{i=۱}^{n}x_i^۲$ ماکزیمم شود ، یا معادلا S با تعریف زیر مینیمم شود:

$$S=\sum_{i=۱}^{n}(X_i-X)^۲\quad\therefore\quad\frac{dS}{dX_i}=۰\ ,\ \frac{d^۲S}{dX_i^۲}>۰$$

شرط اول:

$$\frac{dS}{dX_i}=۰\Rightarrow\sum_{i=۱}^{n}(X_i-X)=۰\Rightarrow X=\overline{X}$$

شرط دوم واضح است.

بنابراین $X=\overline{X}$ مساوی میانگین حسابی همه مشاهدات است.

منبع:

Mathematical Statistics, Kapur ,J-N , New Delhi , S. Chand , 2005

---

[1] *Probable Error*
[2] *Quartile*
[3] اقتصاد دان انگلیسی