آنالیز ریاضی

Http://MiladZaman005.blogfa.com

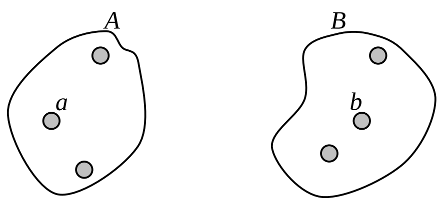
نویسنده : سید جمال میرکمالی

گروه دانش آماری

شهریور ۸۵

نظام اعداد

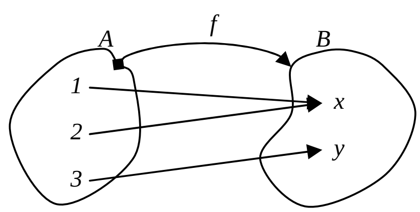
مجموعه : گردایه ای از اشیاء مجموعه نامیده می شود.معمولا مجموعه را با یک حرف بزرگ مثل A و B و... نشان می دهند و عناصر آن مجموعه را با حروف کوچک نشان می دهند مثل $a, b, c, \ldots$.



ضرب دو مجموعه به شکل زیر تعریف می شود:

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$

رابطه : هر زیر مجموعه از $A \times B$ را یک رابطه از A به B گوییم. برای مثال به رابطه زیر توجه کنید:



در این صورت رابطه f به شکل زیر نوشته می شود:

$$f = \{(1,x),(2,x),(3,y)\}$$

تابع : یک تابع از مجموعه A در مجموعه B یک رابطه از A به B است که در آن هیچ دو زوج مرتبی با مولفه های اول یکسان و مولفه های دوم غیر یکسان دیده نمی شود.

رابطه f که در شکل بالا داده شده است ، یک تابع است.

ترتیب : فرض کنید A یک مجموعه باشد . یک ترتیب بر A رابطه ای است ، که با $<$ نمایش داده می شود و دارای دو خاصیت زیر است:

۱- اگر $x \in A$ و $y \in A$ فقط و فقط یکی از گزاره های زیر درست است:

$$x<y, \quad x=y, \quad y<x$$

۲- اگر $x,y,z \in A$ و $x<y$ و $y<z$ آنگاه $x<z$.

مجموعه مرتب : مجموعه مرتب مجموعه ای است که یک رابطه ترتیب بر آن تعریف شده باشد.

کران بالا : فرض کنید $(A,<)$ یک مجموعه مرتب و $B \subseteq A$ باشد . $a \in A$ را یک کران بالا برای مجموعه B گوییم هرگاه

$$\forall b \in B \quad , \quad b \le a$$

کران پایین : فرض کنید $(A,<)$ یک مجموعه مرتب و $B \subseteq A$ باشد . $a \in A$ را یک کران پایین برای مجموعه B گوییم هرگاه

$$\forall b \in B \quad , \quad a \le b$$

سوپریمم ، کوچکترین کران بالا : فرض کنید $(X,<)$ یک مجموعه مرتب و $E \subseteq X$ باشد. $\alpha \in X$ را کوچکترین کران بالا برای مجموعه E گوییم هرگاه:

۱- α کران بالای مجموعه E باشد.

۲- اگر $\beta < \alpha$ آنگاه β کران بالای E نباشد.

در این صورت می نویسیم: $\alpha = \sup(E)$.

ماکزیمم : اگر $\alpha = \sup(E) \in E$ در این صورت α را عضو ماکزیمم مجموعه E می گوییم.

اینفیمم ، بزرگترین کران پایین : فرض کنید $(X,<)$ یک مجموعه مرتب و $E \subseteq X$ باشد. $\alpha \in X$ را بزرگترین کران پایین برای مجموعه E گوییم هرگاه:

۱- α کران پایین مجموعه E باشد.

۲- اگر $\alpha < \beta$ آنگاه β کران پایین E نباشد.

در این صورت می نویسیم: $\alpha = \inf(E)$.

مینیمم: اگر $\alpha = \inf(E) \in E$ در این صورت α را عضو مینیمم مجموعه E می گوییم.

نکته

۱- اگر $\alpha = \sup(E)$ و $\varepsilon > 0$ داده شده باشد ، آنگاه

$$\exists x \in E \quad st \quad \alpha - \varepsilon < x \le \alpha$$

۲- اگر $\alpha = \inf(E)$ و $\varepsilon > 0$ داده شده باشد ، آنگاه

$$\exists x \in E \quad st \quad \alpha \le x < \alpha + \varepsilon$$

۳- سوپریمم و اینفیمم یک مجموعه در صورت وجود منحصر به فردند.

۴- اگر $A, B \subseteq R$ و A,B هردو ناتهی و از بالا کراندار باشند ، تعریف می کنیم:

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

در این صورت $\sup(A+B)$ وجود دارد و

$$\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$$

اصل تامیت (اصل کمال) اعداد حقیقی: هر زیر مجموعه ناتهی و از بالا کراندار در R دارای کوچکترین کران بالا است ؛ بعبارتی:

$$\phi \neq A \subseteq R \ , \ \exists b \in R \ , \ \forall x \in A \quad x \leq b \ \Rightarrow \ \exists \alpha = \sup(A) \in R$$

میدان : میدان عبارت است از یک مجموعه F با دو عملگر که عملگر جمع و ضرب نامیده می شوند و اصول میدان زیر را مشخص می کنند

A) اصول جمع

۱- اگر $x \in F$ و $y \in F$ آنگاه جمع آنها $x+y$ در Fاست.

۲- جمع جابجایی پذیر است : $x+y=y+x$ به ازای همه x,y ها در F .

۳- جمع شرکت پذیر است : $(x+y)+z=x+(y+z)$ به ازای همه x,y,z ها در F.

۴- F یک عنصر 0 دارد بطوری که $0+x=x$ به ازای همه x ها در F .

۵- برای هر x در F یک $-x$ در F مربوط می شود که $x+(-x)=0$.

M) اصول ضرب

۱- اگر $x \in F$ و $y \in F$ آنگاه ضرب آنها xy در Fاست.

۲- ضرب جابجایی پذیر است : $xy=yx$ به ازای همه x,y ها در F .

۳- جمع شرکت پذیر است : $(xy)\,z=x\,(yz)$ به ازای همه x,y,z ها در F.

۴- F یک عنصر $1\neq 0$ دارد بطوری که $1x=x$ به ازای همه x ها در F .

۵- برای هر $x\neq 0$ در F یک $1/x$ در F مربوط می شود که $x\,(1/x)=1$.

D) خاصیت توزیع پذیری

$x(y+z)=xy+xz$ به ازای هر x,y,z در F برقرار است.

میدان مرتب : یک میدان مرتب یک میدان Fاست که مجموعه مرتب هم می باشد ، بطوریکه:

۱- اگر x,y,z در F باشند و $y<z$ آنگاه $x+y<x+z$.

۲- اگر x,y در F باشند و $x,y>0$ آنگاه $xy>0$.

خاصیت ارشمیدوسی اعداد حقیقی :

الف) اگر $x, y \in R$ و $x>0$ آنگاه یک عدد صحیح مثبت وجود دارد بطوری که $nx>y$.

ب) اگر $x, y \in R$ و $x<y$ آنگاه وجود دارد $p \in Q$ بطوریکه $x<p<y$.

نتیجه خاصیت ارشمیدوسی اعداد حقیقی :

$$\forall x \in R^+ \quad , \quad \exists n \in N \quad st \quad \frac{1}{n} < x$$

قضیه: برای هر عدد حقیقی $x>0$ و هر عدد صحیح $n>0$، فقط و فقط یک y در اعداد حقیقی وجود دارد که $y^n = x$.

فضاهای اقلیدوسی : برای هر عدد صحیح مثبت k ، R^k عبارت از مجموعه k تایی مرتب به فرم زیر است :

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_k)$$

که $x_1,x_2,\ldots,x_k$ اعداد حقیقی هستند و مختصات $\boldsymbol{x}$ نامیده می شوند.

ضرب داخلی : ضرب داخلی در R^k به صورت زیر تعریف می شود:

$$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in R^k \Rightarrow \boldsymbol{x}.\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{k}x_i y_i$$

نرم Norm : نرم تابعی است بر R^k که با نماد $\|\;\|$ نمایش داده می شود و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\|\,.\,\|: R^k \to [0,\infty)$$

$$\boldsymbol{x}\mapsto \|\boldsymbol{x}\|=(\boldsymbol{x}.\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}x_i^2}$$

نکته : برای هر $\boldsymbol{x}$ در R^k ، نرم $\boldsymbol{x}$ فاصله $\boldsymbol{x}$ تا مبدا این فضا می باشد.

خواص نرم :

1- $\forall \boldsymbol{x}\in R^k \;,\; \|\boldsymbol{x}\|\geq 0$

2- $\|\boldsymbol{x}\|=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}=(0,0,\ldots,0)$

3- $\|c\boldsymbol{x}\|=|c|\|\boldsymbol{x}\| \;,\; c\in R$

4- $|\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y}|\leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| \;,\; \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in R^k$

5- $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leq \|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\| \;,\; \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in R^k$

6- $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\leq \|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\| \;,\; \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in R^k$

7- $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\leq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}\|+\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}\| \;,\; \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in R^k$

مبانی توپولوژی

متر : فرض کنید X یک مجموعه نا تهی باشد. تابع $d: X\times X\to R$ را یک متر بر X گوییم هر گاه در شرایط زیر صدق کند:

۱- $\forall x,y\in X \;,\; d(x,y)\geq 0$

۲- $x=y\Leftrightarrow d(x,y)=0$

۳- $d(x,y)=d(y,x)$

۴- $\forall x,y,z\in X \;,\; d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$

$d(x,y)$ را فاصله بین x,y نامند.

فضای متری : اگر X یک مجموعه ناتهی باشد و d یک متر بر X باشد ، در این صورت (X,d) را یک فضای متری گوییم.

مثال :

متر اقلیدوسی به فرم زیر تعریف می شود و فضای $(R^k, \| \ \|)$ را فضای متریک اقلیدوسی گوییم.

$$d : R^k \times R^k \to R$$
$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$

متر گسسته به فرم زیر تعریف می گردد:

$$d : X \times X \to R$$
$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

مجموعه محدب : مجموعه $E \subseteq R^k$ را محدب گوییم هرگاه $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$ و $0 < \lambda < 1$ آنگاه

$$\lambda \boldsymbol{x} + (1 - \lambda) \boldsymbol{y} \in E$$

تعریف : فرض کنید X یک فضای متری باشد و همه نقاط و مجموعه های ذکر شده در زیر ، عناصر و زیر مجموعه های X باشند:

۱- یک همسایگی p ، مجموعه ای شامل همه q هایی است که در $d(p,q)<r$ ، $r>0$ صدق می کنند. به عدد r شعاع همسایگی گویند و همسایگی را با نماد $N_r(p)$ نمایش می دهیم.

$$N_r(p) = \{x \mid x \in X, d(x, p) < r\}$$

۲- p یک نقطه حدی مجموعه E است هرگاه هر همسایگی p ، شامل نقطه ای از مجموعه E غیر از p باشد. مجموعه نقاط حدی E را با نماد E' نمایش می دهیم.

۳- اگر نقطه ای حدی نباشد آنرا نقطه تنها (تکین) مجموعه گویند.

۴- E را بسته گوییم هرگاه شامل تمام نقاط حدی خود باشد . ($E' \subseteq E$)

۵- p یک نقطه درونی مجموعه E است هرگاه یک همسایگی N حول p وجود داشته باشد بطوری که $N \subseteq E$. مجموعه نقاط درونی E را درون E نامیم و با نماد E° نشان می دهیم.

۶- E را باز گوییم هرگاه هر نقطه آن درونی باشد. ($E^\circ = E$)

۷ - مکمل E مجموعه همه نقاطی مثل p است که $p \notin E$ و آنرا با نماد E^c نشان می دهیم.

۸- E را کامل گوییم هرگاه بسته باشد و هر نقطه آن حدی باشد ($E' = E$)

۹- E را کراندار گوییم هرگاه عدد حقیقی مثل M و نقطه ای مثل $q \in X$ وجود داشته باشد بطوری که $d(p,q)<M$ به ازای هر $p \in E$.

۱۰- E در X چگال است هرگاه هرنقطه X یا در E باشد یا یک نقطه حدی E باشد.($X \subseteq E \bigcup E'$)

قضیه : هر همسایگی یک مجموعه باز است.

قضیه : اگر p یک نقطه حدی E باشد آنگاه هر همسایگی p بینهایت از نقاط E را شامل می شود.

نتیجه : در فضاهای متری ، مجموعه های متناهی نقطه حدی ندارند.

قضیه : E باز است اگر و تنها اگر مکمل آن بسته باشد.

قضیه :

۱- اجتماع هر تعداد دلخواه از مجموعه های باز ، باز است.

۲- اشتراک تعداد متناهی از مجموعه های باز ، باز است.

۳- اشتراک هر تعداد دلخواه از مجموعه های بسته ، بسته است.

۴- اجتماع تعداد متناهی از مجموعه های بسته ، بسته است.

بستار : اگر (X,d) یک فضای متری و $E \subseteq X$ و E' مجموعه نقاط حدی E باشد ، بستار E عبارتست از $\overline{E} = E \bigcup E'$.

خواص بستار E :

۱- $\overline{E}$ بسته است.

۲- مجموعه E بسته است اگر و فقط اگر $E = \overline{E}$.

۳- $\overline{E}$ کوچکترین مجموعه بسته شامل E می باشد.

قضیه : فرض کنید E زیر مجموعه ای نا تهی از اعداد حقیقی باشد. اگر $\alpha = \sup(E)$ آنگاه $\alpha \in \overline{E}$.

زیر فضا : اگر (X,d) یک فضای متری باشد و $Y \subseteq X$ باشد ، در این صورت (Y,d) نیز یک فضای متری است که به آن زیر فضای متری گفته می شود.

قضیه : فرض کنید (X,d) یک فضای متری و $Y \subseteq X$ باشد و $E \subseteq Y$ ، E در Y باز است اگر و تنها اگر $E = Y \bigcap W$ که W در X باز است.

پوشش: فرض کنید (X,d) یک فضای متری و $E \subseteq X$ و $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ دسته ای از زیر مجموعه های X باشند بقسمی که $E \subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} V_\alpha$. در این صورت $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ را یک پوشش برای E گوییم.

پوشش باز : اگر $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ یک پوشش برای E باشد و برای هر α ، V_α باز باشد ، به آن پوشش باز گوییم.

مجموعه فشرده : زیر مجموعه E را در فضای متری X فشرده گویند هرگاه هر پوشش باز E دارای یک زیر پوشش متناهی باشد.

قضیه : فرض کنید (X,d) یک فضای متری و $Y \subseteq X$ باشد و $E \subseteq Y$، آنگاه E در Y فشرده است اگر وتنها اگر E در X فشرده باشد.

قضیه : زیر مجموعه های فشرده در فضاهای متری بسته اند.

قضیه : زیر مجموعه های بسته مجموعه های فشرده ، فشرده اند.

نتیجه : اگر Y بسته و E فشرده باشد آنگاه $E \bigcap Y$ فشرده است.

قضیه :

۱- اشتراک هر تعداد دلخواه از مجموعه های فشرده ، فشرده است.

۲- اجتماع تعداد متناهی از مجموعه های فشرده ، فشرده است.

قضیه هاینه – برل : هر گاه E زیر مجموعه R^k باشد ، آنگاه گزاره های زیر معادل اند:

الف – E بسته و کراندار است.　　　　ب – E فشرده است.

ج – هر زیر مجموعه نا متناهی E یک نقطه حدی در E دارد.

قضیه : اگر $\{K_\alpha\}$ یک مجموعه از زیرمجموعه های فشرده در فضای X باشد بطوری که اشتراک هر تعداد متناهی از زیر مجموعه ها نا تهی باشد ، آنگاه $\bigcap K_\alpha$ نا تهی است.

نتیجه : اگر $\{K_\alpha\}$ یک دنباله از مجموعه های فشرده ناتهی باشد بطوری که $K_n \supseteq K_{n+1}$ $(n=1,2,\dots)$ آنگاه $\bigcap_1^\infty K_n$ نا تهی است.

قضیه : هر حجره k بعدی ، فشرده است.

قضیه : اگر K فشرده و E زیر مجموعه ای نا متناهی از K باشد، آنگاه E یک نقطه حدی در K دارد.

نتیجه (قضیه وایراشتراس) : هر زیر مجموعه نا متناهی از R^k یک نقطه حدی در R^k دارد.

مجموعه کانتور : فرض کنید E_0 بازه $[0,1]$ باشد. قسمت $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ را حذف کنید E_1 را اجتماع دو بازه زیر قرار دهید:

$$[0,\frac{1}{3}],[\frac{2}{3},1]$$

یک سوم میانی هر یک از این بازه ها را حذف کنید و E_2 را اجتماع بازه ها قرار دهید. این کار را ادامه دهید تا دنباله E_n ها با ویژگی های زیر بدست آوریم:

۱- $E_1 \supset E_2 \supset \dots$

۲- E_n اجتماع 2^n بازه است که هریک طول 3^{-n} دارند.

مجموعه $P=\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ مجموعه کانتور نامیده می شود. مجموعه P فشرده و ناتهی است.

مجموعه های جدا از هم : دو مجموعه A و B از فضای متری X جدا از هم نامیده می شوند اگر $A \bigcap \overline{B}$ و $\overline{A} \bigcap B$ هر دو تهی باشند.

مجموعه همبند : مجموعه $E \subseteq X$ همبند است اگر اجتماع دو مجموعه ی جدا از هم ناتهی نباشد.

دنباله و سری

دنباله : دنباله مجموعه ای مرتب از اعداد است که در تناظر یک به یک با اعداد طبیعی هستند. هر یک از اعداد دنباله یک جمله نامیده می شود. دنباله به شکل $\{a_1,a_2,a_3,...\}$ یا $\{a_n\}$ و یا $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ نمایش داده می شود.

همگرایی : اگر (X,d) یک فضای متری و $\{a_n\}$ دنباله ای از نقاط X باشد ، گوییم دنباله $\{a_n\}$ همگرا به $a \in X$ است هرگاه :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad st \quad \forall n \geq N \quad \Rightarrow \quad d(a_n,a) < \varepsilon$$

و با نماد $a_n \to a$ یا $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ نشان می دهیم. اگر $\{a_n\}$ همگرا نباشد ، واگرا نامیده می شود.

نکته : همگرایی دنباله فقط به خود دنباله مربوط نیست ، بلکه به فضای X هم ربط دارد. مثلا دنباله $\{1/n\}$ در R به صفر همگرا است اما همین دنباله در فضای $X=(0,1]$ واگرا است.

دنباله کراندار : دنباله $\{a_n\}$ را کراندار گوییم هر گاه

$$\exists M > 0 \ , \ \exists a \in X \quad st \ \ a_n \in N_M(a) \ \ \forall n \in N$$

برد دنباله : مجموعه نقاط دنباله ، برد دنباله نامیده می شود و این مجموعه ترتیب ندارد.

قضیه :

۱- اگر $\{a_n\}$ همگرا به a باشد آنگاه هر همسایگی a فقط شامل تعداد متناهی از نقاط دنباله نمی باشد.

۲- حد دنباله در صورت وجود منحصر به فرد است.

۳- هر دنباله همگرا ، کراندار است.

۴- اگر $a_n \to a$ آنگاه دنباله $c_n = d(a_n,a)$ همگرا به صفر است.

۵- اگر a یک نقطه حدی مجموعه E باشد ، آنگاه دنباله ای از نقاط مجموعه E مثل $\{a_n\}$ وجود دارد که به a همگرا است.

قضیه : فرض کنید $\{t_n\}$ و $\{s_n\}$ دنباله ای از اعداد مختلط باشند ، و $t_n \to t$ و $s_n \to s$ آنگاه

$$1\text{-} \lim_{n\to\infty}(s_n + t_n) = s + t$$

$$2\text{-} \lim_{n\to\infty}(cs_n) = cs$$

$$3\text{-} \lim_{n\to\infty}(s_n t_n) = st$$

و اگر s_n ها و s مخالف صفر باشند.

$$4\text{-} \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{s_n}) = \frac{1}{s}$$

قضیه :

فرض کنید $\mathbf{x}_n \in R^k$ ($n=1,2,\ldots$) که در آن $\mathbf{x}_n = (x_{1,n},...,x_{k,n})$

و در این صورت $\{\mathbf{x}_n\}$ به $\mathbf{x} = (x_1,...,x_k)$ همگراست اگر و تنها اگر

$$\lim_{n\to\infty} x_{j,n} = x_j \qquad 1 \leq j \leq k$$

زیر دنباله : فرض کنید $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله از اعداد طبیعی با خاصیت $n_1 < n_2 < \ldots < n_i < n_{i+1} < \ldots$ باشد آنگاه دنباله $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots, a_{n_i}, a_{n_{i+1}}, \ldots$ ، یک زیر دنباله $\{a_n\}$ نامیده می شود و معمولا با نماد $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ نشان داده می شود.

نکته : دنباله $\{a_n\}$ همگرا است اگر و فقط اگر تمام زیر دنباله های آن فقط به یک عدد همگرا باشند.

قضیه : اگر $\{a_n\}$ دنباله ای در فضای متری فشرده X باشد آنگاه $\{a_n\}$ دارای زیر دنباله ای همگرا می باشد.

نتیجه : هر دنباله کراندار در R^k دارای یک زیر دنباله همگرا است.

دنباله کشی: گوییم دنباله $\{a_n\}$ در فضای متری X در شرط کشی صدق می کند هرگاه :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad st \quad \forall n,m \geq N \;\Rightarrow\; d(a_n, a_m) < \varepsilon$$

نکته : هر دنباله همگرا ، کشی است ، اما هر دنباله کشی همگرا نیست.

قطر : فرض کنید E یک زیر مجموعه از فضای متری X باشد ، S را مجموعه همه اعداد حقیقی $d(p,q)$ که p,q در E هستند ، قرار دهید. سوپریمم S ، قطر مجموعه E نامیده می شود.

$$\operatorname{diam} E = \sup\{d(p,q) : p,q \in E\}$$

نکته : قطر ممکن است نا متناهی باشد.

قضیه :

۱- اگر $\overline{E}$ بستار E در فضای متری X باشد ، آنگاه

$$\operatorname{diam} E = \operatorname{diam} \overline{E}$$

۲- اگر $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله ای از زیرمجموعه های فشرده باشند به قسمی که $K_n \supseteq K_{n+1}$ و $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} K_n = 0$ آنگاه اشتراک K_n ها ($\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$) از یک نقطه تشکیل شده است.

نکته:

۱- هر دنباله همگرا ، کراندار است.

۲- هر دنباله کشی ، کراندار است.

۳- هر دنباله کشی در فضای فشرده ، همگرا است.

قضیه : فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله ای کشی باشد که دارای یک زیر دنباله همگرا باشد ، آنگاه همگرا است.

فضای تام: فضای متری X را تام گوییم هرگاه هر دنباله کشی در این فضا ، همگرا به نقطه ای از فضا باشد.

نکته : زیر مجموعه های فضاهای متری تام ، تام هستند.

دنباله صعودی : دنباله $\{a_n\}$ را صعودی گوییم هرگاه $a_n \le a_{n+1}$ به ازای $n=1,2,3,\dots$.

دنباله نزولی : دنباله $\{a_n\}$ را نزولی گوییم هرگاه $a_n \ge a_{n+1}$ به ازای $n=1,2,3,\dots$.

دنباله یکنوا : دنباله را یکنوا گوییم هرگاه صعودی یا نزولی باشد.

دنباله صعودی اکید: دنباله $\{a_n\}$ را صعودی اکید گوییم هرگاه $a_n < a_{n+1}$ به ازای $n=1,2,3,\dots$.

دنباله نزولی اکید: دنباله $\{a_n\}$ را نزولی اکید گوییم هرگاه $a_n > a_{n+1}$ به ازای $n=1,2,3,\dots$.

قضیه : هر دنباله یکنوا همگرا است اگر وفقط اگر کراندار باشد.

حد بی نهایت : فرض کنید $\{s_n\}$ یک دنباله از اعداد حقیقی با ویژگی زیر باشد : برای هر عدد حقیقی M یک عدد صحیح مثل N وجود داشته باشد که به ازای هر $n \ge N$ داشته باشیم $s_n \ge M$ آنگاه می نویسیم $s_n \to +\infty$.
به طور مشابه اگر برای هر M یک عدد صحیح N وجود داشته باشد که به ازای هر $n \ge N$ داشته باشیم $s_n \le M$ آنگاه می نویسیم $s_n \to -\infty$.

حدود بالا و پایین دنباله : اگر دنباله $\{a_n\}$ کراندار باشد ، E را مجموعه همه x هایی تعریف می کنیم که $a_{n_k} \to x$ (به ازای همه زیر دنباله های $\{a_n\}$) .
سوپریمم E را حد بالای دنباله $\{a_n\}$ گوییم و با نماد $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ یا a^* نشان می دهیم. در صورتی که دنباله $\{a_n\}$ از بالا کراندار نباشد می نویسیم $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.
اینفیمم E را حد پایین دنباله $\{a_n\}$ گوییم و با نماد $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ یا a_* نشان می دهیم. در صورتی که دنباله $\{a_n\}$ از پایین کراندار نباشد می نویسیم $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

نکته : دنباله $\{a_n\}$ همگرا به a است اگر وتنها اگر $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

قضیه : اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله از اعداد حقیقی باشند به طوری که به ازای هر $n>N$ (که N عدد طبیعی ثابتی است)، $a_n \le b_n$ آنگاه

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n \le \liminf_{n\to\infty} b_n$$

قضیه :

$1\text{-}\ p>0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p}=0$

$2\text{-}\ p>0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p}=1$

$3\text{-}\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}=1$

$4\text{-}\ p>1, \alpha\in R \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{p^n}=0$

$5\text{-}\ |x|<1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x^n=0$

سری : مجموعه یک دنباله نامتناهی را سری نامتناهی گویند و با نماد $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نمایش می دهند.

دنباله مجموع جزیی : دنباله $\{s_n\}$ با تعریف $s_n=\sum_{i=1}^{n} a_i$ دنباله مجموع جزیی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ گوییم.

همگرایی سری : هرگاه دنباله مجموع جزیی ($\{s_n\}$با تعریف فوق) همگرا به s باشد ، گوییم سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است و می نویسم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=s$ ؛ در غیر این صورت گوییم سری واگرا است.

قضیه – شرط کشی سری : Σa_n همگرا است اگر وتنها اگر به ازای هر $\varepsilon>0$، عدد صحیحی مثل N وجود داشته باشد به طوری که $\forall n,m\geq N$ داشته باشیم $\left|\sum_{i=n}^{m} a_i\right|\leq\varepsilon$.

قضیه : اگر Σa_n همگرا باشد آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n=0$.

قضیه : سری با جملات نا منفی همگراست اگر و تنها اگر دنباله مجموع جزیی آن کراندار باشد.

آزمون مقایسه :

۱- اگر به ازای هر $n\geq N$ ، $0\leq|a_n|\leq b_n$ ، اگر Σb_n همگرا باشد آنگاه Σa_n نیز همگرا است.

۲- اگر به ازای هر $n\geq N$ ، $0\leq c_n\leq d_n$ ، اگر Σc_n واگرا باشد آنگاه Σd_n نیز واگرا است.

آزمون تراکم کشی :

فرض کنید که $\{a_n\}$ یک دنباله از اعداد حقیقی باشد به قسمی که $a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_n\geq\ldots\geq 0$ آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ یا هر دو همگرا یا هردو واگرا هستند.

p– سری : سری $\sum \frac{1}{n^p}$ که p– سری نامیده می شود همگراست اگر $p>1$ و واگراست اگر $p\leq 1$.

آزمون ریشه :

اگر Σa_n یک سری با جملات دلخواه باشد و $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

۱- اگر $\alpha<1$ آنگاه سری Σa_n همگرا است.

۲- اگر $\alpha>1$ آنگاه سری Σa_n واگرا است.

۳- اگر $\alpha=1$ آنگاه آزمون کاربرد ندارد.

آزمون نسبت :

اگر Σa_n یک سری با جملات دلخواه باشد و

۱- اگر $\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$ آنگاه سری Σa_n همگرا است.

۲- اگر وجود داشته باشد N ی که به ازای هر $n\geq N$، $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\geq 1$ آنگاه سری Σa_n واگرا است.

نکته : آزمون ریشه از آزمون نسبت قوی تر است.

قضیه : به ازای هر دنباله $\{a_n\}$ از اعداد مثبت

$$\liminf \frac{c_{n+1}}{c_n} \leq \liminf \sqrt[n]{c_n}$$

$$\limsup \sqrt[n]{c_n} \leq \limsup \frac{c_{n+1}}{c_n}$$

سری توانی :اگر دنباله $\{c_n\}$ از اعداد مختلط داده شده باشد ، سری $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ یک سری توانی حول صفر گفته می شود.

قضیه : اگر $\Sigma c_n x^n$ یک سری توانی باشد و $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ و $r := 1/\alpha$ (اگر α صفر باشد ، $r=\infty$ و اگر α بی نهایت باشد ، $r=0$) آنگاه:

۱- اگر $|x|<r$ آنگاه $\Sigma c_n x^n$ همگرا است.

۲- اگر $|x|>r$ آنگاه $\Sigma c_n x^n$ واگرا است.

۳- اگر $|x|=r$ آنگاه آزمون کاربردی ندارد.

فرمول جمع بندی جزیی : اگر دو دنباله $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ داده شده باشد ، به ازای $n\geq 0$ قرار می دهیم :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

و $A_{-1}=0$ آنگاه به ازای هر $0\leq p\leq q$ داریم:

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p$$

نکته :

۱- اگر Σa_n و Σb_n هر دو همگرا باشند آنگاه $\sum (a_n + b_n)$ نیز همگرا خواهد بود.

۲- اگر Σa_n همگرا باشد آنگاه $\Sigma c a_n$ نیز همگرا خواهد بود.

قضیه : فرض کنید

۱- $\{a_n\}$ دنباله ای باشد که دنباله مجموع جزیی آن یعنی $\{A_n\}$ کراندار باشد

۲- $\{b_n\}$ دنباله ای با ویژگی $b_1 \ge b_2 \ge b_3 \ge \ldots \ge 0$ باشد

۳- $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

آنگاه $\Sigma a_n b_n$ همگرا است.

نتیجه – آزمون سری های متناوب: اگر $\{c_n\}$ دنباله ای اعداد حقیقی باشد به قسمی که

۱- $|c_1| \ge |c_2| \ge |c_3| \ge \ldots$

۲- $c_{2m} \le 0 \;,\; c_{2m-1} \ge 0 \;,\; m = 1,2,3,\ldots$

۳- $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$

آنگاه سری Σc_nهمگرا است.

همگرایی مطلق : گوییم سری Σa_n به طور مطلق همگرا است هرگاه $\Sigma\,|\,a_n\,|$ همگرا باشد.

نکته : هر سری به طور مطلق همگرا ، همگرا است.

قضیه : اگر یک سری به طور مطلق همگرا باشد ، آنگاه هر تجدید آرایش سری نیز همگرا است.

ضرب دو سری : اگر دو سری Σa_n و Σb_n داده شده باشد، قرار می دهیم $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. در این صورت Σc_n ضرب دو سری داده شده نامیده می شود.

قضیه : فرض کنید

۱- $\sum_{n=0}^{\infty} a_k$ به طور مطلق همگرا است

۲- $\sum_{n=0}^{\infty} a_k = A$

۳- $\sum_{n=0}^{\infty} b_k = B$

۴- $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

آنگاه $\Sigma c_n = AB$.

پیوستگی

حد تابع : فرض کنید (X,d) و (Y,d') دو فضای متری باشند و $f:X\to Y$ یک تابع باشد. اگر $E\subseteq X$ و p یک نقطه حدی E باشد ، گوییم حد تابع f در نقطه p برابر با $q\in Y$ است هر گاه:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ st\ \ \forall x\in E\ \ ,\ \ d(x,p)<\delta\ \Rightarrow\ \ d'(f(x),q)<\varepsilon$$

و می نویسیم $f(x)\to q$ وقتی $x\to p$ یا می نویسیم $\lim_{x\to p} f(x)=q$.

نکته : حد تابع در یک نقطه در صورت وجود ، منحصر به فرد است.

پیوستگی : تابع f را در نقطه p پیوسته گوییم هرگاه حد تابع f در نقطه p با برابر با مقدار تابع باشد

$$\lim_{x\to p} f(x)=f(p)$$

اگر چنین نباشد گوییم تابع f در p ناپیوسته است.

قضیه : فرض کنید که $f:X\to Y$ یک تابع و $E\subseteq X$ و $p\in E'$ ، $\lim_{x\to p} f(x)=q$ اگر و تنها اگر به ازای هر دنباله $\{x_n\}$ از نقاط E که $x_n\to p$ داشته باشیم $f(x_n)\to q$.

قضیه : فرض کنید که $f:X\to Y$ در $p\in X$ پیوسته باشد و $g:Y\to Z$ در $f(p)\in Y$ پیوسته باشد آنگاه $gof:X\to Z$ در p پیوسته است.

قضیه : فرض کنید که $f:X\to Y$ ، f بر X پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای هر مجموعه باز V در Y ، $f^{-1}(V)$ در X باز باشد.

نکته : توابع پیوسته مجموعه فشرده را به مجموعه فشرده و مجموعه همبند را به مجموعه همبند می برد.

تابع کراندار : تابع $f:X\to R$ را کراندار گوییم هرگاه

$$\exists M>0\ \ st\ \ \forall x\in X\ \ \ |f(x)|\le M$$

قضیه مقدار اکسترمم : هر تابع پیوسته مثل $f:X\to R$ بر مجموعه فشرده X به ماکزیمم و می نیمم خود می رسد.

پیوستگی یکنواخت : تابع f را بر X پیوسته یکنواخت گوییم هرگاه

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ st\ \ \forall x,y\in X\ \ ,\ \ d(x,y)<\delta\ \Rightarrow\ \ d'(f(x),f(y))<\varepsilon$$

نکته : هرتابع پیوسته یکنواخت ، پیوسته است.

قضیه : اگر $f:X\to Y$ تابعی پیوسته و X فشرده باشد آنگاه f بر X پیوسته یکنواخت است.

نکته : اگر f بر مجموعه متناهی X پیوسته باشد آنگاه f بر X پیوسته یکنواخت است.

قضیه مقدار میانی : فرض کنید $f:[a,b]\to R$ یک تابع پیوسته باشد، اگر $f(a)=A$ و $f(b)=B$ و C یک عدد حقیقی بین A و B باشد آنگاه عدد c در بازه $[a,b]$ وجود دارد طوری که $f(c)=C$.

حد چپ و راست:فرض کنید تابع f بر (a,b) تعریف شده باشد

۱- فرض کنید $a\le x<b$ در این صورت حد راست تابع f در نقطه x را با نماد $f(x+)=q$ تعریف می کنیم هرگاه $f(t_n)\to q$ به ازای هر دنباله $\{t_n\}$در (x,b) که $t_n\to x$.

۲- فرض کنید $a<x\le b$ در این صورت حد چپ تابع f در نقطه x را با نماد $f(x-)=q$ تعریف می کنیم هرگاه $f(t_n)\to q$ به ازای هر دنباله $\{t_n\}$در (a,x) که $t_n\to x$.

نکته : حد تابع در نقطه p وجود دارد هرگاه $f(x-)=f(x+)=\lim_{t\to x} f(t)$.

پیوستگی چپ و راست : تابع f را در نقطه x پیوسته از راست گوییم هرگاه $f(x+)=f(x)$ و پیوسته از چپ گوییم هرگاه $f(x-)=f(x)$.

آنالیز ریاضی ۱

Http://**MiladZaman005**.blogfa.com

منابع:

1- Rudin , Walter, Principles of mathematical analysis , McGgraw-Hill , 1976
2- Werede ,R.C, Spiegle,M.R,Advanced Calculus ,McGraw-Hill

گروه دانش آماری