مساله: فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\mu,\sigma^2)$ باشند. اگر $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2$ آنگاه تابع چگالی $U=\frac{\sqrt{n}}{n-1}\frac{(X_1-\bar{X})}{S}$ را به دست آورید.

حل : بدون از دست دادن کلیت مساله می توان فرض کرد $\mu=0,\sigma^2=1$

چرا که:

$U=\frac{\sqrt{n}}{n-1}\frac{\frac{X_1-\mu}{\sigma}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(\frac{X_i-\mu}{\sigma})}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(\frac{X_i-\mu}{\sigma}-\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma})^2}}$ و یا $U=\frac{\sqrt{n}}{n-1}\frac{Z_1-\bar{Z}}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(Z_1-\bar{Z})^2}}$ که در آن $Z_i\sim N(0,1)$.

اکنون تبدیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}Y_1\\Y_2\\\vdots\\Y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}}\\ \frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{-1}{\sqrt{n(n-1)}} & \cdots & \frac{-1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{-1}{\sqrt{n(n-1)}}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\\vdots\\X_n\end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\mathbf{Y}=\mathbf{AX} \tag{2}$$

که در آن $\mathbf{A}$ ماتریس متعامد هلمرت است یعنی $\mathbf{A'A}=\mathbf{AA'}=\mathbf{I}$ لذا $|\mathbf{A}|=|\mathbf{A'}|=\pm1$ و $\mathbf{X}=\mathbf{A'Y}$.

همچنین داریم:

$$\sum_{i=1}^n x_i^2=\mathbf{x'x}\overset{(2)}{=}(\mathbf{A'y})'(\mathbf{A'y})=\mathbf{y'AA'y}=\mathbf{y'y}=\sum_{i=1}^n y_i^2 \tag{3}$$

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})=(2\pi)^{-n/2}\exp\{\frac{-1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2\}$$

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})=\frac{1}{|\mathbf{A}|}f_{\mathbf{X}}(\mathbf{A'y})=f_{\mathbf{X}}(\mathbf{A'y})\overset{(3)}{=}(2\pi)^{-n/2}\exp\{\frac{-1}{2}\sum_{i=1}^n y_i^2\}=\prod_{i=1}^n\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{y_i^2}{2}\}$$

بنابراین $Y_1,Y_2,\dots,Y_n$ از یکدیگر مستقل هستند و $i=1,2,\dots,n$ $\quad Y_i\sim N(0,1)$.

همچنین بنا بر (۱) داریم:

$$Y_2=\frac{(n-1)X_1-X_2-\dots-X_n}{\sqrt{n(n-1)}}=\sqrt{\frac{n}{n-1}}(X_1-\bar{X})$$

$$(n-1)S^2=\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2=\sum_{i=1}^n X_i^2-n\bar{X}^2\overset{(3)}{=}\sum_{i=1}^n Y_i^2-Y_1^2=\sum_{i=2}^n Y_i^2$$

$$U=\frac{\sqrt{n}}{n-1}\frac{(X_1-\bar{X})}{S}=\frac{Y_2}{\sqrt{\sum_{i=2}^{n}Y_i^2}}=\frac{Y_2}{\sqrt{Y_2^2+\sum_{i=3}^{n}Y_i^2}}=\frac{Y_2}{\sqrt{Y_2^2+T}}$$

که در آن $T=\sum_{i=3}^{n}Y_i^2\sim\chi^2_{(n-2)}$ و از $Y_2\sim N(0,1)$ مستقل است. در نتیجه

$$f_{Y_2,T}(y,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}.\frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(\frac{n-2}{2})}t^{\frac{n-4}{2}}e^{\frac{-t}{2}}\qquad y\in\mathbb{R},t>0$$

$$\begin{cases}U=\dfrac{Y_2}{\sqrt{Y_2^2+T}}\\ V=T\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}Y_2=\dfrac{U\sqrt{V}}{\sqrt{1-U^2}}\\ T=V\end{cases}\quad\Rightarrow\quad|\mathbf{J}|=\frac{\sqrt{V}}{(1-U^2)^{3/2}}$$

$$f_{U,V}(u,v)=\frac{\sqrt{v}}{(1-u^2)^{3/2}}f_{Y_2,T}(\frac{u\sqrt{v}}{\sqrt{1-u^2}},v)$$

$$=\frac{\sqrt{v}}{(1-u^2)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2v}{2(1-u^2)}}.\frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(\frac{n-2}{2})}v^{\frac{n-4}{2}}e^{\frac{-v}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(\frac{n-2}{2})}\frac{v^{\frac{n-3}{2}}}{(1-u^2)^{3/2}}e^{-\frac{v}{2(1-u^2)}}\qquad -1<u<1\ ,\ v>0$$

$$f_U(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(\frac{n-2}{2})(1-u^2)^{3/2}}\int_0^{\infty}v^{\frac{n-3}{2}}e^{-\frac{v}{2(1-u^2)}}dv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(\frac{n-2}{2})(1-u^2)^{3/2}}\Gamma(\frac{n-1}{2})\left[2(1-u^2)\right]^{\frac{n-1}{2}}$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n-2}{2})}(1-u^2)^{\frac{n-4}{2}}\qquad -1<u<1$$

* این مساله در کتاب مبانی آمار ریاضی ، تالیف دکتر پارسیان ، در مثال ۴-۲۴ ، صفحه ۱۷۷ مطرح شده است.