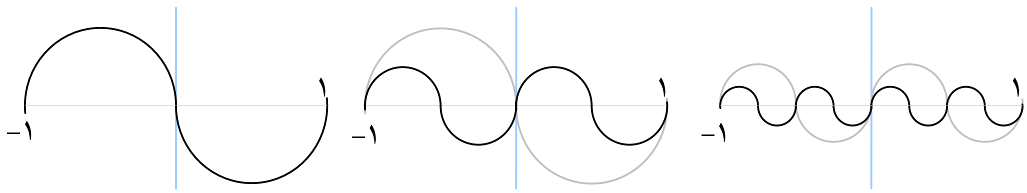
پارادوکس *Ying Yang*

مرحله ۱ : روی بازه های $[-1,0]$ و $[0,1]$ نیم دایره هایی به شعاع $\frac{1}{2}$ مطابق شکل زیر رسم می کنیم.

مرحله ۲: هر یک از بازه های $[-1,0]$ و $[0,1]$ را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده و در هر قسمت یک نیم دایره رسم می کنیم.

این کار را همین طور ادامه می دهیم.



مرحله ۱ مرحله ۲ مرحله ۳

در مرحله ۱، طولی منحنی ضخیم برابر با محیط یک دایره به شعاع $\frac{1}{2}$ است ؛ پس $L_1 = 2\pi \times \frac{1}{2} = \pi$.

در مرحله ۲ ، طول منحنی ضخیم برابر با محیط دو دایره به شعاع $\frac{1}{4}$ است ؛ پس $L_2 = 2 \times 2\pi \times \frac{1}{4} = \pi$.

به همین ترتیب در مر حله n، طول منحنی برابر با محیط 2^{n-1} دایره به شعاع 2^{-n} است ؛ یعنی $L_n = \pi$.

اگر $f_n(x)$ نماینده منحنی در مرحله n ام باشد آنگاه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \sup\limits_{x\in[-1,1]} \{ f_n(x)\} = \dfrac{1}{2^n} \\ \inf\limits_{x\in[-1,1]} \{ f_n(x)\} = \dfrac{-1}{2^n} \end{array}\right\} \Rightarrow M_n = \sup\limits_{x\in[-1,1]} \{| f_n(x)|\} = \frac{1}{2^n}$$

پس $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$ است. بنابراین تابع $f_n(x)$ به طور یکنواخت به تابع صفر در بازه $[-1,1]$ همگرا است.

$$f_n(x) \xrightarrow[{[-1,1]}]{Unif} 0$$

در حقیقت منحنی $f_n(x)$ در نهایت بر محور x در بازه $[-1,1]$ منطبق می شود. اما این بازه دارای طول ۲ است و طول منحنی همیشه π است . پس آیا $2 \overset{?}{=} \pi$.